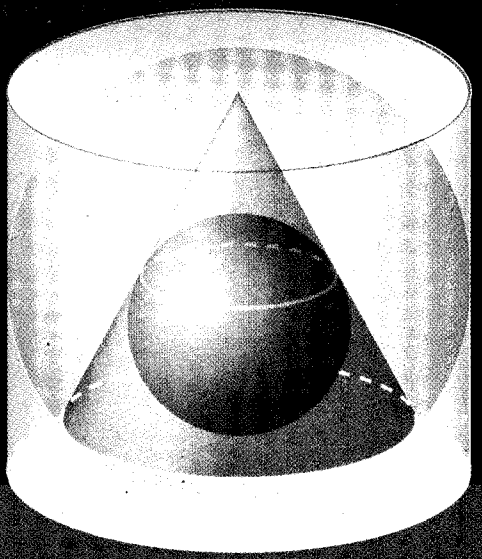
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HÌNH HỌC

NÂNG CAO

12

SÁCH GIÁO VIÊN



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐOÀN QUỲNH (Tổng chủ biên) - VĂN NHƯ CƯƠNG (Chủ biên)
PHẠM KHẮC BAN - LÊ HUY HÙNG - TẠ MÂN

HÌNH HỌC

SÁCH GIÁO VIÊN

12

NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Mở đầu

I – GIỚI THIỆU CHƯƠNG TRÌNH HÌNH HỌC LỚP 12 NÂNG CAO

1. Chuẩn kiến thức, kĩ năng

Khối đa diện

Chủ đề	Mức độ cần đạt
1. Khái niệm về khối đa diện. Khối lăng trụ. Khối chóp. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện.	*Về kiến thức :* Biết khái niệm khối lăng trụ, khối chóp, khối chóp cụt, khối đa diện.
2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sơ lược về hai khối đa diện bằng nhau.	*Về kiến thức :* Biết phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của hai khối đa diện.
3. Giới thiệu khối đa diện đều. Giới thiệu phép vị tự và sự đồng dạng của hai khối đa diện đều cùng loại.	*Về kiến thức :* – Biết khái niệm khối đa diện đều. – Biết năm loại khối đa diện đều. – Biết tính đối xứng qua mặt phẳng của khối tứ diện đều, khối lập phương và khối bát diện đều. – Biết phép vị tự trong không gian.
4. Khái niệm về thể tích khối đa diện. Thể tích khối hộp chữ nhật. Công thức thể tích khối lăng trụ và khối chóp.	*Về kiến thức :* – Biết khái niệm về thể tích khối đa diện. – Biết công thức tính thể tích khối lăng trụ và khối chóp. *Về kĩ năng :* Tính được thể tích khối lăng trụ và khối chóp.

Mặt cầu, mặt trụ, mặt nón

Chủ đề	Mức độ cần đạt
1. Mặt cầu. Giao của mặt cầu và mặt phẳng. Mặt phẳng kính, đường tròn lớn. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu. Giao của mặt cầu và đường thẳng. Tiếp tuyến của mặt cầu. Công thức tính diện tích mặt cầu.	*Về kiến thức :* – Hiểu các khái niệm mặt cầu, mặt phẳng kính, đường tròn lớn, mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu, tiếp tuyến của mặt cầu. – Biết công thức tính diện tích mặt cầu. *Về kĩ năng :* Tính được diện tích mặt cầu.
2. Khái niệm về mặt tròn xoay	*Về kiến thức :* Biết khái niệm mặt tròn xoay.
3. Mặt nón. Giao của mặt nón và mặt phẳng. Diện tích xung quanh của hình nón.	*Về kiến thức :* Biết khái niệm mặt nón và công thức tính diện tích xung quanh của hình nón. *Về kĩ năng :* Tính được diện tích xung quanh của hình nón.
4. Mặt trụ. Giao của mặt trụ và mặt phẳng. Diện tích xung quanh của hình trụ.	*Về kiến thức :* Biết khái niệm mặt trụ và công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ. *Về kĩ năng :* Tính được diện tích xung quanh của hình trụ.

Phương pháp toạ độ trong không gian

Chủ đề	Mức độ cần đạt
1. Hệ toạ độ trong không gian. Toạ độ của một vectơ. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ. Tích vectơ (tích có hướng) của hai vectơ. Toạ độ của điểm, khoảng cách giữa hai điểm. Phương trình mặt cầu.	*Về kiến thức :* – Biết các khái niệm hệ toạ độ trong không gian, toạ độ của một vectơ, toạ độ của điểm, biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ, khoảng cách giữa hai điểm. – Biết khái niệm và một số ứng dụng của tích có hướng. – Biết phương trình mặt cầu.

	Về kĩ năng : – Tính được toạ độ của tổng, hiệu hai vectơ, tích của một vectơ với một số, tích vô hướng của hai vectơ. – Tính được tích có hướng của hai vectơ. Tính được diện tích hình bình hành và thể tích khối hộp bằng cách dùng tích có hướng. – Tính được khoảng cách giữa hai điểm có toạ độ cho trước. – Xác định được toạ độ của tâm và tính được bán kính của mặt cầu có phương trình cho trước. – Viết được phương trình mặt cầu.
2. Phương trình mặt phẳng. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Phương trình tổng quát của mặt phẳng. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.	*Về kiến thức :* – Hiểu khái niệm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. – Biết phương trình tổng quát của mặt phẳng, điều kiện song song hoặc vuông góc của hai mặt phẳng, công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng. *Về kĩ năng :* – Xác định được vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. – Biết cách viết phương trình tổng quát của mặt phẳng và tính được khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.
3. Phương trình đường thẳng. Phương trình tham số của đường thẳng. Điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau, cắt nhau, song song hoặc vuông góc với nhau.	*Về kiến thức :* Biết phương trình tham số của đường thẳng, điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau, cắt nhau, song song hoặc vuông góc với nhau. *Về kĩ năng :* – Biết cách viết phương trình tham số của đường thẳng. – Từ các phương trình tham số của hai đường thẳng, biết cách xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng đó.

2. Những thay đổi về nội dung, về yêu cầu và mức độ các kiến thức

So với chương trình cũ, chương trình Hình học lớp 12 nâng cao lần này có nhiều thay đổi về nội dung, về yêu cầu và mức độ của các kiến thức được đưa ra cho học sinh.

Về nội dung

Chương trình Hình học lớp 12 nâng cao có ba chương :

Chương I trình bày khái niệm về khối đa diện và thể tích của chúng. Đây cũng là những kiến thức có liên quan đến thực tế, tuy nhiên về lí thuyết chúng ta sẽ gặp những khái niệm hoặc những chứng minh khá phức tạp, nằm ngoài mức độ yêu cầu đối với học sinh phổ thông. Bởi vậy, các thầy giáo nên chú ý đến các mục tiêu đặt ra cho toàn chương cũng như cho từng mục mà chúng tôi có nói rõ trong cuốn sách này.

Chương II nhằm giới thiệu khái niệm về mặt tròn xoay nói chung và đi sâu vào mặt cầu, mặt trụ và mặt nón. Những kiến thức này trước kia được đặt ở lớp 11. Chương trình cũng có đưa ra các công thức về thể tích và diện tích của hình cầu, hình trụ, hình nón là những kiến thức cần biết của người lao động.

Chương III cung cấp cho học sinh các kiến thức và kĩ năng bước đầu về phương pháp toạ độ trong không gian, chủ yếu tập trung vào : phương trình mặt phẳng, phương trình mặt cầu, phương trình đường thẳng và một số các bài toán liên quan. Về mặt lí thuyết, chương này không có vấn đề gì phức tạp, do đó yêu cầu đối với học sinh chỉ là nắm vững các phương pháp để giải quyết các bài toán cụ thể, đồng thời có kĩ năng tính toán.

Về yêu cầu và mức độ các kiến thức

Các kiến thức đưa vào chương trình Hình học 12 nâng cao khá nhiều và một số vấn đề khá phức tạp về mặt lí thuyết. Nhưng tinh thần của chương trình chỉ nhằm giới thiệu các khái niệm là chủ yếu, bỏ qua các chứng minh phức tạp.

Trong đời sống thường nhật, học sinh thường gặp các hình (và khối) đa diện. Tuy nhiên, định nghĩa chính xác khái niệm hình đa diện và nhất là khối đa diện thì lại không đơn giản chút nào. Bởi vậy, khi học xong chương này chúng ta không thể đòi hỏi học sinh phải trả lời câu hỏi kiểu như : Thế nào là hình đa diện ? Thế nào là khối đa diện ? Thế nào là thể tích khối đa diện ?

Mục tiêu đặt ra là làm cho học sinh biết vận dụng các công thức về thể tích hình lăng trụ và hình chóp để có thể tính thể tích của các khối đa diện cụ thể khác. Ví dụ, khi chia một khối chóp thành hai phần bởi một mặt phẳng nào đó thì họ có thể hình dung ra cách tính thể tích của mỗi phần.

Có thể nói rằng mục tiêu của hai chương đầu chỉ là nhận biết và áp dụng. Chẳng hạn, khi đã cho một khối đa diện nào đó, học sinh phải nhận biết đó là khối chóp hay khối lăng trụ, là khối lăng trụ đứng hay khối lăng trụ đều,... và từ đó biết cách tính thể tích hay diện tích xung quanh của khối đó. Đối với các hình quen thuộc, họ có thể nhận ra hình có tính đối xứng hay không, chẳng hạn có thể kể ra các mặt phẳng đối xứng của hình lập phương,... Học sinh không được nhầm lẫn giữa "hình chóp tứ giác" và "hình tứ diện", giữa "hình lăng trụ" và "hình trụ", giữa "hình hộp đứng" và "hình hộp chữ nhật",...

Chương III về mặt lí thuyết không có gì khó. Mục tiêu là học sinh nắm được ý nghĩa hình học của những tính toán mà họ phải làm. Chẳng hạn, để tính khoảng cách từ một điểm A tới đường thẳng Δ thì trước hết họ phải hiểu khoảng cách đó là gì. Từ đó, họ phải xác định được toạ độ điểm H trên Δ sao cho $AH \perp \Delta$. Việc xác định toạ độ điểm H có thể làm theo nhiều cách khác nhau mà học sinh cần phải biết và tuỳ trường hợp mà lựa chọn cách thích hợp. Ngoài ra, để tính khoảng cách đó, học sinh có thể dùng tích có hướng của hai vectơ.

II – VỀ SÁCH GIÁO KHOA HÌNH HỌC 12 NÂNG CAO

Đây là cuốn sách giáo khoa (SGK) tiếp theo của cuốn Hình học 10 và Hình học 11 nâng cao, cho nên các cuốn sách này có cấu trúc, cách trình bày, văn phong đều thống nhất với nhau. Chỉ xin nhắc lại một số điểm sau đây :

1. Các Câu hỏi [?] và Hoạt động được đưa vào SGK nhằm giúp học sinh có điều kiện suy nghĩ và làm việc chủ động hơn. Các tác giả đã cân nhắc kĩ lưỡng khi chọn hệ thống các Câu hỏi và Hoạt động để có thể phục vụ tốt cho bài giảng của thầy giáo. Tuy nhiên, tuỳ trình độ cụ thể của học sinh trong lớp, các thầy giáo có thể không áp dụng một cách máy móc các Câu hỏi và Hoạt động đó mà có thể thay đổi cho phù hợp.

2. Cuối mỗi chương đều có phần ôn tập chương. Trong phần này, chúng tôi tóm tắt các kiến thức cần nhớ, đưa ra một số câu hỏi để học sinh tự trả lời, giúp cho họ tự kiểm tra chính mình hoặc giúp nhau kiểm tra. Nếu học sinh thấy mình không trả lời được câu hỏi nào thì tự họ xem lại phần có liên quan. Cuối cùng là một số bài tập mà thầy giáo nên lựa chọn để chữa trong các giờ ôn tập chương và các câu hỏi trắc nghiệm khách quan để học sinh luyện tập.

3. Cuối SGK, chúng tôi có thêm phần *Ôn tập cuối năm*, trong đó có các câu hỏi trắc nghiệm khách quan và một số đề tự luận.

4. Có một số vấn đề không phức tạp, tuy trong chương trình không có nhưng chúng tôi vẫn đưa vào vì thấy cần thiết. Chẳng hạn : khái niệm và công thức về thể tích của khối cầu, khối nón, khối trụ ; cách tính khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Học sinh có thể giải các bài toán loại này mà không cần thêm kiến thức mới.

Chương I

KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

Mục tiêu của chương

Chương này trình bày khái niệm về khối đa diện và thể tích của khối đa diện, cung cấp cho học sinh hai công thức về thể tích của khối lăng trụ và khối chóp.

Yêu cầu đối với học sinh là :

1. Hình dung được một cách trực quan về khối đa diện, hình đa diện.

2. Hiểu được thế nào là phân chia một khối đa diện thành các khối đa diện bé hơn và lắp ghép nhiều khối đa diện thành một khối đa diện lớn hơn.

3. Có khái niệm về phép đối xứng qua mặt phẳng và phép dời hình. Hiểu được thế nào là mặt phẳng đối xứng của các hình đa diện không phức tạp.

4. Có khái niệm về phép vị tự và các hình đồng dạng. Đặc biệt có hình dung về các loại khối đa diện đều và sự đồng dạng của các khối đa diện đều cùng loại.

5. Hiểu và nhớ công thức thể tích của khối lăng trụ, khối chóp và áp dụng chúng để tính thể tích của các khối đa diện phức tạp hơn.

Phân phối thời gian (dự kiến)

§1. Khái niệm về khối đa diện	2 tiết.
§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện	4 tiết.
§3. Phép vị tự và sự đồng dạng của các khối đa diện. Các khối đa diện đều	3 tiết.
§4. Thể tích của khối đa diện	3 tiết.
Ôn tập chương	2 tiết.
Tổng số	14 tiết.

Những điều cần lưu ý

1. Nội dung chương này có liên quan mật thiết với các kiến thức về hình học không gian ở lớp 11. Trong khi giảng bài trên lớp, nếu gặp các kiến thức cũ cần thiết mà học sinh có thể quên, thầy giáo nên nhắc lại cho học sinh nhớ để có thể hiểu được bài mới.

2. Một số vấn đề không thể trình bày một cách chính xác cho học sinh như : định nghĩa hình đa diện, khối đa diện, định nghĩa thể tích và chứng minh sự tồn tại thể tích của khối đa diện. Việc trình bày các khái niệm đó thường dựa vào cách mô tả trực quan.

§1 KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hình dung được thế nào là một khối đa diện và một hình đa diện. Không yêu cầu phải hiểu và nhớ một cách cặn kẽ định nghĩa của các khái niệm đó.
2. Hiểu được rằng đối với các khối đa diện phức tạp, ta có thể phân chia chúng thành các khối đa diện đơn giản hơn. Điều đó được áp dụng trong việc tính thể tích.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Hình đa diện và khối đa diện là những khái niệm tuy rất trực quan, nhưng định nghĩa chính xác thì lại khá phức tạp và khó hiểu đối với học sinh.

   Dưới đây chúng tôi xin trình bày rõ hơn để các thầy giáo tham khảo.

   Định nghĩa hình đa diện. *Hình đa diện là một hình $\mathscr{H}$ gồm một số hữu hạn đa giác thoả mãn ba tính chất sau đây :*

   i) Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

ii) Mỗi cạnh của một đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.

iii) Nếu $\mathcal{S}$ và $\mathcal{S}'$ là hai đa giác tuỳ ý thì có một dãy các đa giác $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots \mathcal{S}_n$ sao cho $\mathcal{S}_1$ là $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_n$ là $\mathcal{S}'$ và hai đa giác $\mathcal{S}_i$ và $\mathcal{S}_{i+1}$ có chung một cạnh với mọi $i = \overline{1, n-1}$.

Nhà toán học Jordan đã chứng minh định lí mang tên ông dưới đây :

Định lí Jordan *: Mỗi hình đa diện $\mathscr{H}$ chia các điểm không thuộc $\mathscr{H}$ thành hai tập hợp con không giao nhau $\mathscr{H}^0$ và $\mathscr{H}^1$ có các tính chất sau đây :*

i) Hai điểm cùng thuộc một trong hai tập hợp $\mathscr{H}^0$ hoặc $\mathscr{H}^1$ đều có thể nối với nhau bằng một đường gấp khúc không có điểm chung với $\mathscr{H}$.

ii) Nếu hai điểm lần lượt thuộc $\mathscr{H}^0$ và $\mathscr{H}^1$ thì mọi đường gấp khúc nối hai điểm đó đều có điểm chung với $\mathscr{H}$.

iii) Tập $\mathscr{H}^0$ không chứa đường thẳng nào, tập $\mathscr{H}^1$ có chứa những đường thẳng.

Định nghĩa khối đa diện. *Tập $\mathscr{H}^0$ trong định lí Jordan nói trên gọi là phần trong của $\mathscr{H}$, tập $\mathscr{H}^1$ gọi là phần ngoài của $\mathscr{H}$, tập hợp $\mathscr{H} \cup \mathscr{H}^0$ gọi là khối đa diện xác định bởi (hoặc giới hạn bởi) hình đa diện $\mathscr{H}$.*

Chứng minh định lí Jordan rất khó đối với học sinh phổ thông.

2. Để giới thiệu khái niệm khối đa diện, SGK đã dùng phương pháp mô tả một cách trực quan. Trước tiên, SGK đưa ra một số hình (mà sau này sẽ được gọi là hình đa diện) có các đặc điểm chung :

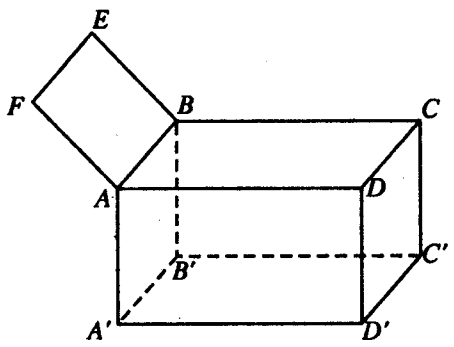
a) Mỗi hình $\mathscr{H}$ gồm một số hữu hạn đa giác.

b) Mỗi hình $\mathscr{H}$ đều phân chia không gian thành hai phần, phần bên trong và phần bên ngoài.

Ở đây khái niệm "phân chia" là hoàn toàn trực giác, để rõ thêm ta có thể hình dung khi bơm một chất khí có màu vào bên trong. Thực ra có thể định nghĩa "phân chia" một cách toán học như nội dung của định lí Jordan : Hai điểm cùng một phần (phần trong hoặc phần ngoài) khi và chỉ khi có thể nối với nhau bằng một đường gấp khúc không có điểm chung với hình $\mathscr{H}$. Dầu ta có nêu định nghĩa như thế nhưng ta vẫn không chứng minh tại sao các hình $\mathscr{H}$ lại có thể phân chia không gian thành hai phần, hoặc nêu ra những điều kiện của $\mathscr{H}$ để $\mathscr{H}$ phân chia không gian thành hai phần. Tóm lại,ở đây ta thừa nhận định lí Jordan một cách trực giác, hay nói cách khác, ta chỉ xét những hình $\mathscr{H}$ thoả mãn định lí Jordan.

Để thấy rõ rằng không phải mỗi hình $\mathscr{H}$ có tính chất a) đều có tính chất b), ta chỉ cần nêu ra một ví dụ đơn giản là một hình hộp bỏ đi một mặt. Khi đó, ta không thể bơm khí màu vào "trong" $\mathscr{H}$ vì khí có thể tràn ra "ngoài".

Tuy vậy, không phải mỗi hình $\mathscr{H}$ có tính chất a) và b) đều là hình đa diện. Ví dụ ta lấy hình $\mathscr{H}$ gồm một hình hộp chữ nhật *ABCD.A'B'C'D'* được gắn thêm hình chữ nhật *ABEF* (h.1). Khi đó, hình $\mathscr{H}$ thoả mãn cả hai tính chất a) và b) (nó cũng chia không gian thành hai phần : phần trong là phần trong của hình hộp chữ nhật, phần ngoài gồm những điểm không thuộc phần trong và không thuộc $\mathscr{H}$).



Hình 1

Tuy nhiên, hình $\mathscr{H}$ không phải là hình đa diện theo định nghĩa đã biết vì cạnh *AB* là cạnh chung của ba miền đa giác : *ABCD*, *ABEF* và *ABB'A'*.

Cuối cùng, SGK đưa ra khái niệm hình đa diện với hai điều kiện i) và ii) đã nói ở 1). Điều kiện iii) không nêu ra vì ta đã buộc hình $\mathscr{H}$ phải chia không gian thành hai phần.

3. Chú ý rằng đối với hình đa diện lồi thì việc chứng minh định lí Jordan khá dễ dàng. Hình đa diện được gọi là lồi nếu nó giới hạn một khối đa diện lồi. Tuy nhiên, lớp các hình đa diện lồi là quá hẹp, trong thực tế ta thường gặp những hình đa diện không lồi mà ta vẫn cần tính thể tích của chúng.

4. Khái niệm phân chia một khối đa diện thành các khối đa diện được định nghĩa không khó khăn và có thể mô tả một cách trực quan. Tuy nhiên, chứng minh mệnh đề *"Có thể phân chia mọi khối đa diện thành các khối tứ diện"* lại không đơn giản chút nào.

III. TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

?1 Ta không thể nói rằng có khối đa diện giới hạn bởi hình $\mathscr{H}'$ vì hình $\mathscr{H}'$ không chia không gian thành hai phần mà một phần có thể tô màu còn phần kia thì không.

1

Các hình 1a, 1b, 1c, 1d, 1e đều thoả mãn hai điều kiện 1) và 2). Hình 2b không thoả mãn điều kiện 2) vì cạnh AB không phải là cạnh chung của hai đa giác.

?2 Có thể phân chia khối chóp bất kì thành các khối tứ diện. Chẳng hạn khối chóp $S.A_1A_2A_3...A_n$ có thể phân chia thành các khối tứ diện sau đây : $SA_1A_2A_3$, $SA_2A_3A_4$,...., $SA_{n-1}A_nA_1$.

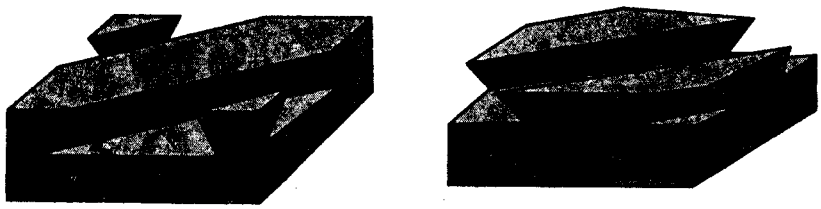
2

1) Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mặt phẳng $(A'BC)$ thì nó được phân chia thành hai khối chóp $A'.ABC$ và $A'.BB'C'C$.

2) Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể phân chia thành ba khối tứ diện bằng nhiều cách, chẳng hạn có thể chia thành ba khối tứ diện $AA'BC$, $BB'A'C'$, $CC'A'B$.

Vui một chút

Có thể làm hai miếng gỗ như hình 2 để ghép lại thành hình 6 trong SGK.

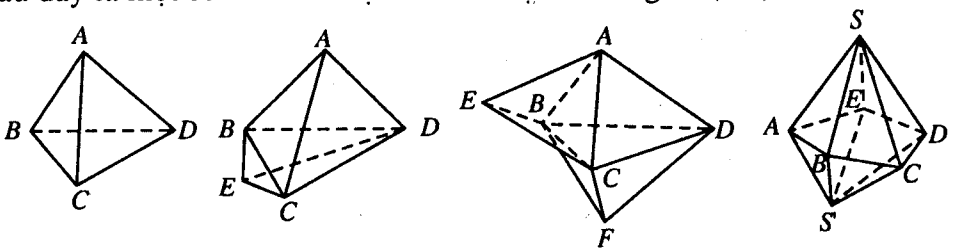


Hình 2

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

1. Gọi số cạnh của khối đa diện là C, số mặt là M. Vì mỗi mặt có ba cạnh và mỗi cạnh lại chung cho hai mặt nên $3M = 2C$. Suy ra M là số chẵn.

Sau đây là một số khối đa diện có các mặt là tam giác (h.3)



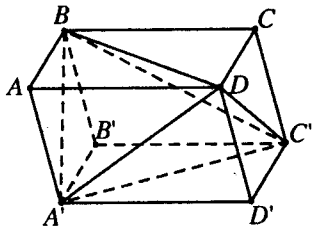
$M = 4$ $M = 6$ $M = 8$ $M = 10$

Hình 3

2. Giả sử khối đa diện có C cạnh và có $Đ$ đỉnh. Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung của ba cạnh và mỗi cạnh có hai đỉnh nên $3Đ = 2C$, vậy $Đ$ phải là số chẵn.

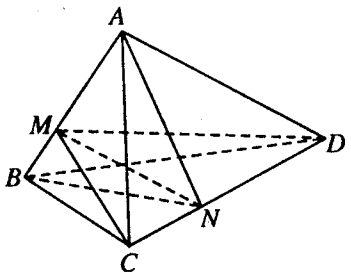
3. Gọi A là một đỉnh của khối đa diện. Theo giả thiết, đỉnh A là đỉnh chung cho ba cạnh, ta gọi ba cạnh đó là AB, AC, AD. Cạnh AB phải là cạnh chung của hai mặt tam giác, đó là hai mặt ABC và ABD (vì qua đỉnh A chỉ có 3 cạnh). Tương tự, ta có các mặt tam giác ACD và BCD. Vậy khối đa diện đó chính là khối tứ diện $ABCD$.

4. Có thể phân chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành năm khối tứ diện sau đây : $ABDA'$, $CBDC'$, $B'A'C'B$, $D'A'C'D$, $BDA'C'$ (h.4).



Hình 4

5. Cho khối tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M nằm giữa A và B, điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (MCD) và (NAB), ta chia khối tứ diện đã cho thành bốn khối tứ diện : $AMCN$, $AMND$, $BMCN$, $BMND$ (h.5).



Hình 5

§2 PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MẶT PHẲNG VÀ SỰ BẰNG NHAU CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa của phép đối xứng qua mặt phẳng và tính chất "bảo tồn khoảng cách" của nó.
2. Nhận biết được một mặt phẳng nào đó có phải là mặt phẳng đối xứng của một hình đa diện hay không.
3. Hiểu được định nghĩa của phép dời hình.
4. Nhận biết được hai hình đa diện bằng nhau trong các trường hợp không phức tạp.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Phần này chủ yếu làm cho học sinh nắm được một số khái niệm cơ bản : phép đối xứng qua mặt phẳng, phép dời hình, mặt phẳng đối xứng của hình đa diện, sự bằng nhau của hình đa diện.
2. SGK nêu lên nhưng không chứng minh các tính chất cơ bản của phép dời hình như : biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến mặt phẳng thành mặt phẳng, biến một góc thành góc có cùng số đo,... vì chúng tương tự như các tính chất của phép dời hình trong mặt phẳng.
3. Đối với các khối đa diện lồi, người ta chứng minh được mệnh đề : *Nếu phép dời hình F biến tập các đỉnh của khối đa diện lồi $\mathscr{H}$ thành tập các đỉnh của khối đa diện lồi $\mathscr{H}'$ thì F biến $\mathscr{H}$ thành $\mathscr{H}'$.*

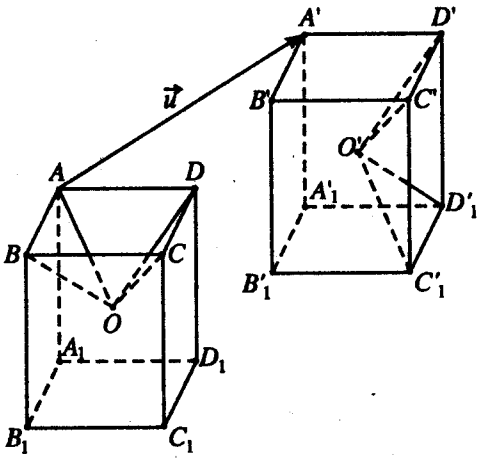
   Trong các bài tập, ta chỉ đòi hỏi học sinh chứng minh sự bằng nhau của các khối đa diện lồi. Bởi vậy chỉ cần tìm phép dời hình F thoả mãn điều kiện nói trong mệnh đề trên.
4. Đối với các khối đa diện không lồi, mệnh đề trên không đúng. Có thể nêu ví dụ sau :

   Giả sử phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u}$ biến hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ thành hình hộp chữ nhật $A'B'C'D'.A'_1B'_1C'_1D'_1$. Khi đó,

tâm O của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ biến thành tâm O' của hình hộp $A'B'C'D'.A'_1B'_1C'_1D'_1$. Ta xét hai khối đa diện sau :

Khối đa diện $\mathscr{H}$ có 9 đỉnh $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, O$ và các mặt là : 5 hình chữ nhật ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DAA_1D_1, $A_1B_1C_1D_1$ và 4 tam giác OAB, OBC, OCD, ODA.

Khối đa diện $\mathscr{H}'$ có 9 đỉnh $A', B', C', D', A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, O'$ và các mặt là : 5 hình chữ nhật $A'B'C'D'$, $B'C'C'_1B'_1$, $A'_1B'_1C'_1D'_1$, $A'_1D'_1D'A'$, $A'B'B'_1A'_1$ và 4 tam giác $O'C'D'$, $O'D'D'_1$, $O'D'_1C'_1$, $O'C'_1C'$.



Hình 6

Khi đó, phép tịnh tiến T biến tập hợp các đỉnh của $\mathscr{H}$ thành tập hợp các đỉnh của $\mathscr{H}'$ nhưng rõ ràng F không biến $\mathscr{H}$ thành $\mathscr{H}'$.

III – TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

Nếu có ít nhất một trong hai điểm M, N không nằm trên (P) thì qua bốn điểm M, N, M', N' có một mặt phẳng (Q) (MM' và NN' cùng vuông góc với (P) nên song song với nhau). Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q) thì trong mp(Q), phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hai điểm M, N thành hai điểm M' và N' nên $MN = M'N'$.

?1 Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có 9 mặt phẳng đối xứng : 3 mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, AD, AA' và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt đi qua hai cạnh đối diện.

2

Hình bát diện đều $ABCDEF$ có tất cả 9 mặt phẳng đối xứng. Ngoài ba mặt phẳng $(ABCD)$, $(BEDF)$, $(AECF)$, còn có 6 mặt phẳng, mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn AB và CD).

?2 Hai mặt cầu có bán kính bằng nhau thì bằng nhau. Phép đối xứng qua mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng nối tâm của hai mặt cầu là phép dời hình biến mặt cầu này thành mặt cầu kia.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

6. a) a trùng với a' khi a nằm trên mp(P) hoặc a vuông góc với mp(P).

b) a song song với a' khi a song song với mp(P).

c) a cắt a' khi a cắt mp(P) nhưng không vuông góc với (P).

d) a và a' không bao giờ chéo nhau.

7. a) Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các mặt phẳng đối xứng sau đây : mp(SAC), mp(SBD), mặt phẳng trung trực của AB (đồng thời của CD) và mặt phẳng trung trực của AD (đồng thời của BC).

b) Hình chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có ba mặt phẳng đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, BC, CA.

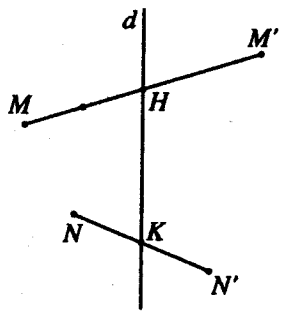
c) Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ (mà không có mặt nào là hình vuông) có ba mặt phẳng đối xứng, đó là ba mặt phẳng trung trực của ba cạnh AB, AD, AA'.

8. a) Gọi O là tâm của hình lập phương. Rõ ràng phép đối xứng tâm O biến các đỉnh của hình chóp $A.A'B'C'D'$ thành các đỉnh của hình chóp $C'.ABCD$. Vậy hai hình chóp đó bằng nhau.

b) Phép đối xứng qua mp($ADC'B'$) biến các đỉnh của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các đỉnh của hình lăng trụ $AA'D'.BB'C'$ nên hai hình lăng trụ đó bằng nhau.

9. • Nếu phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v}$, suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ và do đó $MN = M'N'$. Vậy phép tịnh tiến là một phép dời hình.

• Giả sử phép đối xứng qua đường thẳng d biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' (h.7). Gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM' và NN', ta có :



Hình 7

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'} = 2\overrightarrow{HK},\ \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}$$
$$= \overrightarrow{HN} - \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HN'} + \overrightarrow{HM'}\ .$$
$$= \overrightarrow{N'N} + \overrightarrow{MM'}.$$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{NN'}$ đều vuông góc với $\overrightarrow{HK}$ nên

$$\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{M'N'}\right).\left(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M'N'}\right) = 2\overrightarrow{HK}.\left(\overrightarrow{N'N} + \overrightarrow{MM'}\right) = 0.$$

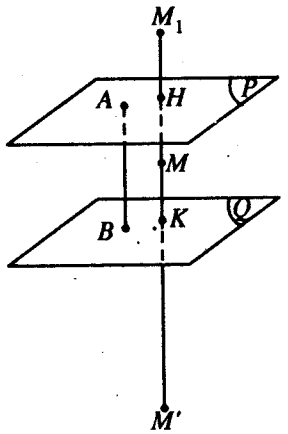
Suy ra $\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{M'N'}^2$ hay $MN = M'N'$. Vậy phép đối xứng qua d là phép dời hình.

• Nếu phép đối xứng tâm O biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$, suy ra

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NM}.$$

Do đó $M'N' = MN$, suy ra phép đối xứng tâm O là một phép dời hình.

10. a) (h.8a) Lấy hai điểm A và B lần lượt nằm trên (P) và (Q) sao cho $AB \perp (P)$. Với một điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua mp(P) và M' là điểm đối xứng với M_1 qua mp(Q).



Hình 8a

Như vậy, M' là ảnh của M qua phép hợp thành của phép đối xứng qua mp(P) và phép đối xứng qua mp(Q).

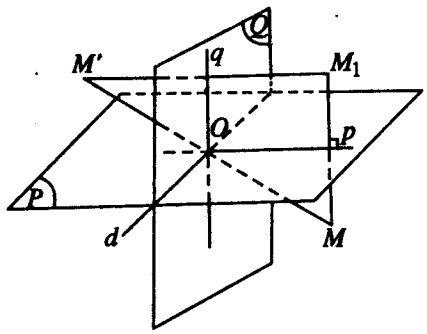
Gọi H và K lần lượt là trung điểm của MM_1 và M_1M' thì ta có :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\left(\overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1K}\right) = 2\overrightarrow{HK} = 2\overrightarrow{AB}.$$

Như vậy phép hợp thành nói trên chính là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

b) Giả sử F là hợp thành của phép đối xứng qua mp(P) và phép đối xứng qua mp(Q), trong đó (P) vuông góc với (Q). Ta gọi d là giao tuyến của (P) và (Q).

Với một điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua mp(P) và M' là điểm đối xứng với M_1 qua mp(Q). Như vậy, M' là ảnh của M qua phép hợp thành F.



Hình 8b

Nếu M nằm trên (P) hoặc trên (Q) thì dễ thấy M' là điểm đối xứng của M qua d.

Nếu M không nằm trên cả (P) và (Q) thì ba điểm M, M_1 và M' xác định cho ta mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q), do đó vuông góc với d.

Gọi giao tuyến của (R) với (P) và (Q) lần lượt là p và q, còn O là giao điểm của p và q. Khi đó, O nằm trên d. Xét trong mặt phẳng (R) thì điểm M' là ảnh của điểm M qua hợp thành của phép đối xứng qua đường thẳng p và phép đối xứng qua đường thẳng q. Suy ra O là trung điểm của MM'. Mặt khác $MM' \perp d$ nên F là phép đối xứng qua đường thẳng d.

§3 PHÉP VỊ TỰ VÀ SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA CÁC KHỐI ĐA DIỆN. CÁC KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa của phép vị tự trong không gian.
2. Hiểu được thế nào là hai hình đồng dạng.
3. Có hình dung trực quan về năm loại khối đa diện đều và sự đồng dạng của các khối đa diện đều cùng loại.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Định nghĩa của phép vị tự không khó khăn lắm đối với học sinh vì nó cũng tương tự như trong mặt phẳng.
2. Không đi sâu vào những tính chất của phép vị tự. Mục đích của phần này chỉ là đưa ra khái niệm hai hình đồng dạng với nhau để từ đó, học sinh thấy được các khối đa diện đều cùng loại thì đồng dạng với nhau.

III – TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

?1 Phép vị tự tỉ số k là phép dời hình khi và chỉ khi $k = \pm 1$. Nếu $k = 1$ thì ta được phép đồng nhất. Nếu $k = -1$ thì ta được phép đối xứng qua tâm vị tự.

?2 Các khối đa diện trên hình 21 SGK không phải là khối đa diện lồi vì mỗi khối có ít nhất hai điểm mà đoạn thẳng nối hai điểm đó không thuộc khối ấy.

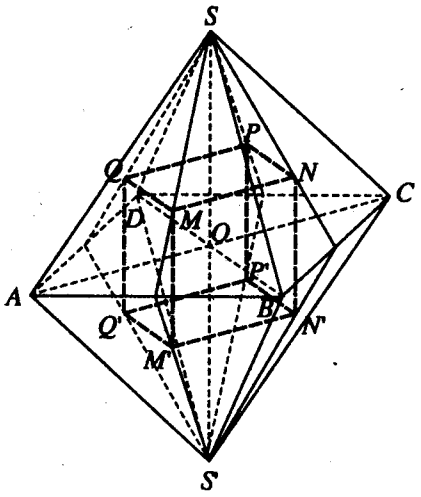
?3 Khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều lần lượt là khối đa diện đều thuộc loại $\{3 ; 3\}$, $\{4 ; 3\}$, $\{3 ; 4\}$.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

11. Giả sử phép vị tự V tỉ số k biến đường thẳng a thành đường thẳng a'. Lấy hai điểm phân biệt M, N nằm trên a thì ảnh của chúng là các điểm M', N' nằm trên a'. Theo tính chất của phép vị tự thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. Từ đó suy ra hai đường thẳng a và a' song song hoặc trùng nhau.

b) Cho khối tám mặt đều *SABCDS'* (h.12). Gọi *M, N, P, Q, M', N', P', Q'* lần lượt là trọng tâm của các mặt *SAB, SBC, SCD, SAD, S'AB, S'BC, S'CD, S'DA* thì dễ dàng chứng minh được rằng các tứ giác *MNPQ, M'N'P'Q', MNN'M', PQQ'P', NPP'N', MQQ'M'* đều là hình vuông và mỗi đỉnh *M, N, P, Q, M', N', P', Q'* đều là đỉnh chung của 3 cạnh.

Vậy *MNPQ.M'N'P'Q'* là khối lập phương.



Hình 12

§4 THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh hiểu được khái niệm thể tích của khối đa diện, các công thức tính thể tích của một số khối đa diện đơn giản. Từ đó, học sinh có thể vận dụng để tính thể tích của các khối đa diện phức tạp hơn hoặc để giải một số bài toán hình học.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

Lí thuyết về thể tích của các khối đa diện khá phức tạp, không thể trình bày một cách chặt chẽ và đầy đủ cho học sinh phổ thông.

Sau đây chúng tôi xin trình bày sơ lược về lí thuyết đó :

a) *Định nghĩa.* Gọi Ω là tập hợp các khối đa diện trong không gian. Hàm số $V : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là *hàm thể tích* nếu nó thoả mãn các tính chất sau đây :

i) Với mọi khối đa diện $\mathscr{H}$, ta có $V(\mathscr{H}) > 0$.

ii) Nếu hai khối đa diện $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ bằng nhau thì $V(\mathscr{H}) = V(\mathscr{H}')$.

iii) Nếu khối đa diện $\mathscr{H}$ được phân chia thành hai khối đa diện $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ thì $V(\mathscr{H}) = V(\mathscr{H}_1) + V(\mathscr{H}_2)$.

iv) Nếu $\mathscr{C}$ là khối lập phương có cạnh bằng 1 thì $V(\mathscr{C}) = 1$.

b) *Định nghĩa.* Nếu hàm thể tích V tồn tại và duy nhất thì giá trị $V(\mathscr{H})$ được gọi là *thể tích của khối đa diện* $\mathscr{H}$.

c) Sau đây, tạm thời giả thiết rằng hàm thể tích V tồn tại (điều này được chứng minh sau), ta đi tìm công thức tính thể tích khối lăng trụ và khối chóp. Ta có :

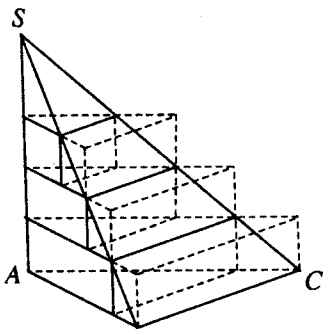
+ Thể tích V của khối hộp chữ nhật với ba kích thước a, b, c là $V = abc$. (Công thức này hiển nhiên đúng khi a, b, c là những số nguyên, khi chúng là số thực bất kì, ta phải dùng đến phép tính về giới hạn).

+ Thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông bằng Bh, trong đó B là diện tích đáy của lăng trụ và h là chiều cao của lăng trụ. (Bằng cách ghép hình lăng trụ đứng như thế với một khối lăng trụ bằng nó sao cho ta được một khối hộp chữ nhật, ta suy ra điều phải chứng minh).

+ Thể tích của khối lăng trụ đứng bất kì bằng Bh, trong đó B là diện tích đáy và h là chiều cao của lăng trụ. (Chứng minh bằng cách chia hình lăng trụ đứng đã cho thành các hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông. Muốn vậy ta chia đáy hình lăng trụ đã cho thành các tam giác, và mỗi tam giác chia thành hai tam giác vuông).

+ Thể tích của khối chóp tam giác bằng $\frac{1}{3}Bh$ với B là diện tích đáy, h là chiều cao.

Chứng minh (h.13). Trước hết, ta xét khối đa diện $\mathscr{H}$ là hình chóp tam giác $S.ABC$ có diện tích đáy ABC là B và có đường cao là một trong các cạnh bên, chẳng hạn đó là cạnh $SA = h$. Chia đoạn thẳng SA thành n phần bằng nhau bởi các điểm $S \equiv A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n \equiv A$, và qua các điểm A_i vẽ các mặt phẳng song song với mp(ABC), ta được các thiết diện là các tam giác $A_iB_iC_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Dễ thấy rằng diện tích các tam giác đó là :



Hình 13

$$B_i = \frac{i^2}{n^2}B.$$

Ta dùng các kí hiệu :

• $\mathscr{H}_i$ (i = 1, 2, ..., n − 1) là phần của $\mathscr{H}$ nằm giữa hai mặt phẳng : $(A_iB_iC_i)$ và $(A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1})$, tức là khối chóp cụt $A_iB_iC_iA_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ còn $\mathscr{H}_0$ là khối chóp $S.A_1B_1C_1$. Ghép các khối $\mathscr{H}_i$ (i = 0, 1, 2,..., n−1), ta được khối đa diện $\mathscr{H}$.

• $\mathscr{H}_i^0$ là khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác $A_iB_iC_i$ và một cạnh bên là A_iA_{i+1} (i = 1, 2,..., n−1). Ghép các khối đa diện $\mathscr{H}_i^0$ với nhau, ta được khối đa diện $\mathscr{H}^0$.

• $\mathscr{H}_i^1$ là khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ và một cạnh bên là A_iA_{i+1} (i = 0, ..., n − 1). Ghép các khối đa diện $\mathscr{H}_i^1$, ta được khối đa diện $\mathscr{H}^1$.

Với các kí hiệu như trên, ta dễ dàng suy ra : $\mathscr{H}^0 \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}^1$, và do đó, từ các tính chất của hàm thể tích V, ta suy ra :

$$V(\mathscr{H}^0) \le V(\mathscr{H}) \le V(\mathscr{H}^1). \qquad (*)$$

Áp dụng công thức về thể tích của khối lăng trụ đứng, ta có :

$$V(\mathscr{H}_i^0) = B_i.\frac{h}{n} = \frac{i^2}{n^3}Bh, \text{ và do đó}$$

$$V(\mathscr{H}^0) = \sum_{i=1}^{n-1} V(\mathscr{H}_i^0) = \frac{1}{n^3}Bh\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}Bh\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}Bh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

Tương tự ta có :

$$V(\mathscr{H}^1) = \sum_{i=0}^{n-1} V(\mathscr{H}_i^1) = \frac{1}{n^3}Bh\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}Bh\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

Như vậy, bất đẳng thức (*) trở thành :

$$\frac{1}{3}Bh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right) \le V(\mathscr{H}) \le \frac{1}{3}Bh\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

Từ đó, khi cho n tiến tới vô cùng, ta suy ra $V(\mathscr{H}) = \frac{1}{3}Bh$.

Bây giờ, nếu $\mathscr{H}$ là khối chóp bất kì $S.ABC$. Kẻ đường cao SI của khối chóp, ta được ba khối chóp $S.IAB$, $S.IBC$ và $S.ICA$ đều có cạnh bên SI là đường cao. Từ đó áp dụng kết quả trên, ta suy ra điều phải chứng minh.

+ Thể tích của khối chóp bất kì bằng $\frac{1}{3}Bh$, với B là diện tích đáy, h là chiều cao. (Chỉ cần phân chia khối chóp bất kì thành các khối chóp tam giác và áp dụng kết quả trên).

+ Thể tích của khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao (làm như trong SGK).

Từ những công thức để tính thể tích trên đây, ta suy ra rằng nếu hàm thể tích V tồn tại thì nó là duy nhất.

Chúng ta lưu ý rằng SGK trình bày phần này đúng theo trình tự trên, tuy nhiên có bỏ qua những chứng minh phải dùng tới giới hạn.

c) Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh sự tồn tại của hàm thể tích V. Trong SGK, ta không trình bày vấn đề này vì quá khó.

Chúng ta bắt đầu bằng cách xây dựng một hàm số $V : \Omega \to \mathbb{R}$ như sau :

+ Nếu khối đa diện $\mathscr{H}$ là một hình tứ diện thì ta lấy $V(\mathscr{H})$ bằng $\frac{1}{3}$ tích số của diện tích một mặt nào đó của tứ diện và chiều cao tương ứng. Bằng cách dùng tích hỗn tạp của ba vectơ, ta có thể chứng minh rằng giá trị $V(\mathscr{H})$ không phụ thuộc việc chọn mặt của hình tứ diện để lấy diện tích.

+ Nếu $\mathscr{H}$ là một khối đa diện tuỳ ý, ta phân chia nó thành các khối tứ diện $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, ..., \mathscr{H}_n$. Khi đó ta đặt $V(\mathscr{H}) = V(\mathscr{H}_1) + V(\mathscr{H}_2) + ... + V(\mathscr{H}_n)$.

Để định nghĩa trên hợp lí, ta phải chứng minh rằng giá trị $V(\mathscr{H})$ xác định như trên không phụ thuộc vào cách phân chia khối đa diện $\mathscr{H}$ thành các khối tứ diện. Chứng minh đó khá dài dòng, chúng tôi trình bày sơ lược như sau, bỏ qua các chi tiết tuy hiển nhiên nhưng chứng minh chặt chẽ thì không phải dễ : Giả sử khối đa diện $\mathscr{H}$ có hai cách phân chia : cách thứ nhất chia thành các tứ diện Δ_i^1, $i = 1, 2, ..., n$, cách thứ hai chia thành các tứ diện Δ_j^2, $j = 1, 2, ..., m$. Nếu với i và j nào đó, hai tứ diện Δ_i^1 và Δ_j^2

có điểm trong chung thì $\Delta_i^1 \cap \Delta_j^2$ là một khối đa diện lồi (có nhiều nhất 8 mặt). Ta phân chia khối đa diện lồi ấy thành các hình tứ diện Δ_k^*. Làm như vậy đối với mọi cặp chỉ số (i, j), ta được cách phân chia thứ ba của $\mathscr{H}$ thành các tứ diện Δ_k^*, $k = 1, 2, ...p$, có tính chất : Mỗi một Δ_i^1 (hoặc Δ_j^2) đều được phân chia thành một số các Δ_k^* nào đó. Từ đó, theo định nghĩa của hàm số V đối với các khối đa diện, ta suy ra :

$$\sum_{i=1}^{n} V(\Delta_i^1) = \sum_{k=1}^{p} V(\Delta_k^*) = \sum_{j=1}^{m} V(\Delta_j^2).$$

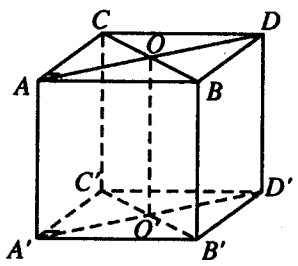
Như vậy, ta có một hàm số $V : \Omega \to \mathbb{R}$. Dễ chứng minh rằng hàm số đó chính là hàm thể tích.

III – TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

Cách 1. (h.14) Giả sử $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đã cho. Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Khi đó, phép đối xứng qua đường thẳng OO' biến khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối lăng trụ $DCB.D'C'B'$.

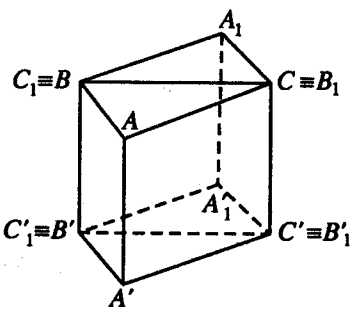
Khối hộp chữ nhật $ABDC.A'B'D'C'$ (với các kích thước a, b, h) có thể tích gấp đôi thể tích khối lăng trụ đã cho. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}abh$.



Hình 14

Cách 2. (h.15) Ghép khối lăng trụ đã cho $ABC.A'B'C'$ với khối lăng trụ $A_1B_1C_1.A_1'B_1'C_1'$ bằng nó sao cho $B_1 \equiv C$, $C_1 \equiv B$, $B_1' \equiv C'$, $C_1' \equiv B'$, $A_1 \in (ABC)$, $A_1' \in (A'B'C')$. Khi đó ta được hình hộp chữ nhật $ABA_1C.A'B'A_1'C'$ có thể tích gấp đôi thể tích khối lăng trụ đã cho.

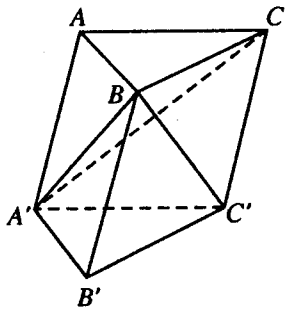
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}abh$.



Hình 15

2

a) Ba khối tứ diện đó là : $A'ABC$, $BA'B'C'$ và $A'BCC'$ (h.16).



Hình 16

b) Hai khối tứ diện $A'ABC$ và $BA'B'C'$ là hai khối chóp $A'.ABC$ và $B.A'B'C'$ có hai mặt đáy bằng nhau và hai chiều cao bằng nhau (đều bằng chiều cao h của khối lăng trụ) nên chúng có thể tích bằng nhau.

Hai khối tứ diện $BA'B'C'$ và $A'BCC'$ là hai khối chóp $A'.BB'C'$ và $A'.BCC'$ có diện tích đáy bằng nhau và chiều cao bằng nhau (bằng khoảng cách từ A' tới mp$(BCC'B')$).

Tóm lại thể tích ba khối tứ diện nói trên bằng nhau.

c) Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được phân chia thành ba khối tứ diện có thể tích bằng nhau $A'ABC$, $BA'B'C'$ và $A'BCC'$. Suy ra thể tích khối lăng trụ bằng ba lần thể tích khối chóp $A'.ABC$:

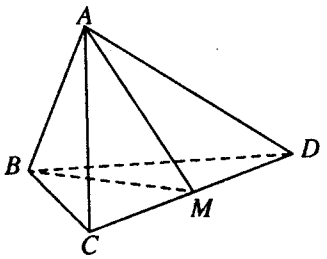
$$V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A'.ABC} = 3.\frac{1}{3}.S_{ABC}.h = S.h.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ tam giác bằng tích số của diện tích đáy và chiều cao.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

15. a) Không đổi. b) Có thể thay đổi. c) Không đổi.

16. (h.17) Xét khối tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M nằm giữa C và D sao cho $CM = kMD$. Khi đó, khối tứ diện $ABCD$ được phân chia thành hai khối tứ diện $ABCM$ và $ABMD$.

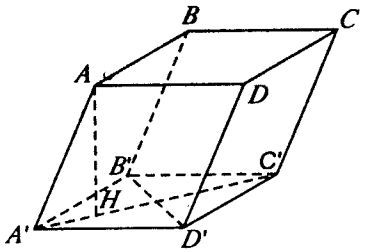


Hình 17

Rõ ràng $V_{ABCM} = k.V_{ABMD}$.

17. (h.18) Vì $AA'B'D'$ là tứ diện đều nên đường cao AH của nó có chân H là tâm của tam giác đều $A'B'D'$. Suy ra

$$A'H = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Hình 18

Dễ thấy đáy $A'B'C'D'$ là hình thoi có góc $B'A'D'$ bằng 60^o nên :

$$S_{A'B'C'D'} = A'B'.A'D'\sin 60^o = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

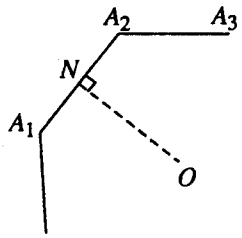
Vậy thể tích khối hộp đã cho là :

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

18. Gọi $A_1A_2...A_n$ là đáy của khối lăng trụ đều và O là tâm của đa giác đều $A_1A_2....A_n$ (h.19).

Kẻ $ON \perp A_1A_2$, ta có :

$$ON = A_1N\cot\widehat{NOA_1} = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}.$$



Hình 19

Vậy diện tích đáy của khối lăng trụ đều là :

$$S = n.S_{OA_1A_2} = n.\frac{1}{2}A_1A_2.ON = \frac{1}{4}na^2\cot\frac{\pi}{n}.$$

Vì lăng trụ đã cho là lăng trụ đều nên chiều cao của nó bằng cạnh bên, tức bằng a, do đó thể tích của khối lăng trụ là $V = \frac{1}{4}na^3\cot\frac{\pi}{n}$.

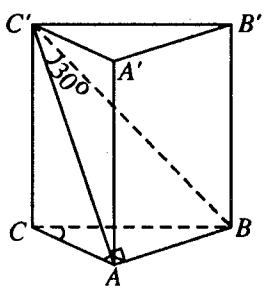
19. (h.20)

a) Ta có $BA \perp AC$, $BA \perp AA'$ nên $BA \perp (ACC'A')$.

Vậy AC' là hình chiếu của BC' trên mp$(ACC'A')$.

Theo giả thiết, góc $BC'A$ bằng 30^o nên

$$AC' = AB\cot 30^o = AC\tan 60^o\cot 30^o$$
$$= b\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3b.$$



Hình 20

b) Ta có

$$CC'^2 = AC'^2 - AC^2 = 9b^2 - b^2 = 8b^2.$$

Do đó $CC' = 2b\sqrt{2}$. Vậy thể tích của khối lăng trụ là :

$$V = S.h = \frac{1}{2}AB.AC.CC'$$

$$= \frac{1}{2}b\sqrt{3}.b.2b\sqrt{2} = b^3\sqrt{6}.$$

Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần : khối chóp $S.AB'MD'$ và khối đa diện $ABCDB'MD'$. Ta có :

$$\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2}{9}.$$

$$\frac{V_{S.MB'D'}}{V_{S.CBD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{V_{S.MB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{9}.$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{V_{SAB'MD'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.AB'D'} + V_{S.MB'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Vậy $$\frac{V_{SAB'MD'}}{V_{ABCDB'MD'}} = \frac{1}{2}.$$

25. Giả sử phép vị tự f tỉ số k biến hình chóp $A.BCD$ thành hình chóp $A'.B'C'D'$. Khi đó, f biến đường cao AH của hình chóp $A.BCD$ thành đường cao $A'H'$ của hình chóp $A'.B'C'D'$. Bởi vậy $A'H' = |k|AH$. Tam giác BCD được biến thành tam giác $B'C'D'$ qua f nên $S_{B'C'D'} = k^2 S_{BCD}$.

Từ đó suy ra $$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}S_{B'C'D'}.A'H'}{\frac{1}{3}S_{BCD}.AH} = |k|^3.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

I – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

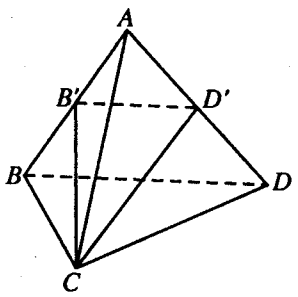
1. Để chuẩn bị tốt cho tiết ôn tập, yêu cầu học sinh ở nhà ôn lại những kiến thức cần nhớ trong chương, tự mình trả lời các câu hỏi tự kiểm tra và làm các bài ôn tập trong SGK.
2. Trong tiết ôn tập, giáo viên chữa một số bài tập của phần ôn tập để qua đó củng cố kiến thức và rèn kĩ năng giải toán cho học sinh. Không cần phải chữa hết bài tập.
3. Cho học sinh làm bài kiểm tra 45 phút.

II – HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TẬP

1. Mặt phẳng $(CB'D')$ chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối chóp : $C.AB'D'$ và $C.BDD'B'$ (h.26). Hai khối chóp $C.AB'D'$ và $C.ABD$ có chiều cao bằng nhau, ngoài ra dễ thấy rằng

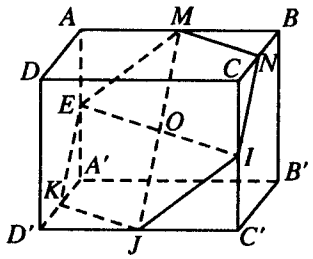
$$S_{AB'D'} = \frac{1}{4}S_{ABD}.$$

Suy ra $V_{C.AB'D'} = \frac{1}{4}V$ và do đó $V_{C.BDD'B'} = \frac{3}{4}V$.



Hình 26

2. Gọi M, N, I, J, K, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CC', $C'D'$, $D'A'$, $A'A$ của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, còn O là giao điểm của các đường chéo của khối hộp (h.27). Dễ thấy rằng ba đường thẳng MN, EI và KJ đôi một song song và chúng lần lượt đi qua ba điểm thẳng hàng M, O, J nên ba đường thẳng đó đồng phẳng. Vậy sáu điểm M, N, I, J, K, E cùng nằm trên một mặt phẳng mà ta kí hiệu là (α).



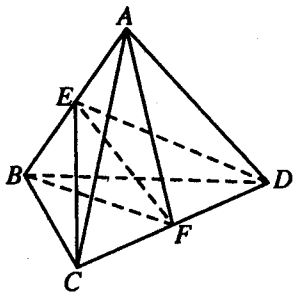
Hình 27

Mặt phẳng (α) chia khối hộp thành hai khối đa diện, khối thứ nhất có các đỉnh là M, N, I, J, K, E, A, C, D, D', khối thứ hai có các đỉnh là M, N, I, J,

K, E, C', A', B, B'. Phép đối xứng qua điểm O biến tập hợp đỉnh của khối đa diện thứ nhất thành tập hợp đỉnh của khối đa diện thứ hai. Suy ra hai khối đa diện đó bằng nhau và do đó có thể tích bằng nhau.

3. (h.28) a) Hai mặt phẳng (ABF) và (CDE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành bốn khối tứ diện : $ADEF$, $ACEF$, $BDEF$ và $BCEF$.

b) Mặt phẳng (ABF) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối tứ diện $ABCF$ và $ABDF$ có thể tích bằng nhau (vì F là trung điểm của CD). Mặt phẳng (CDE) lại chia mỗi khối tứ diện $ABCF$ và $ABDF$ thành hai khối tứ diện có thể tích bằng nhau (vì E là trung điểm của AB). Tóm lại, bốn khối tứ diện trong câu a) có thể tích bằng nhau.



Hình 28

c) Nếu $ABCD$ là tứ diện đều thì nó nhận mp(ABF) và mp(CDE) làm các mặt phẳng đối xứng và phép đối xứng qua đường thẳng EF biến tứ diện $ADEF$ thành tứ diện $BCEF$. Từ đó suy ra :

Khối tứ diện $ADEF$ bằng khối tứ diện $ACEF$ (vì chúng đối xứng với nhau qua mp(ABF)).

Khối tứ diện $ADEF$ bằng khối tứ diện $BDEF$ (vì chúng đối xứng với nhau qua mp(CDE)).

Khối tứ diện $ADEF$ bằng khối tứ diện $BCEF$ (vì phép đối xứng qua trục EF biến tứ diện này thành tứ diện kia).

4. (h.29)

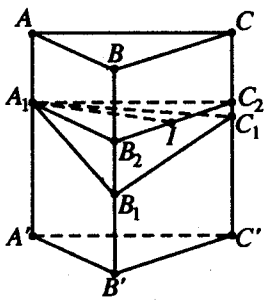
a) *Cách 1*. Ta có

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{A_1.ABC} + V_{A_1.BCC_1B_1}$$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}S_{BCC_1B_1}.d\left(A_1,(BCC_1B_1)\right)$$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(b+c).BC.d(A,BC)$$

$$= \frac{1}{3}aS + \frac{1}{3}(b+c)S = \frac{1}{3}(a+b+c)S.$$



Hình 29

$$V_{A_1B_1C_1A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{ABCA_1B_1C_1}$$

$$= Sh - \frac{1}{3}(a+b+c).S$$

$$= \frac{1}{3}\left[(h-a)+(h-b)+(h-c)\right].S.$$

Cách 2. Giả sử $a \le b \le c$. Qua A_1 dựng một mặt phẳng song song với mp(ABC), cắt BB' và CC' tại B_2 và C_2. Khi đó $BB_2 = CC_2 = AA_1 = a$.

Ta có :

$$V_{ABC.A_1B_2C_2} = S.a \qquad (1)$$

Kẻ $A_1I \perp B_2C_2$ thì $A_1I \perp$ mp(BCC'), do đó A_1I là đường cao của hình chóp $A_1.B_1C_1C_2B_2$. Đáy của hình chóp đó là hình thang vuông $B_1C_1C_2B_2$ nên có diện tích

$$S_{B_1C_1C_2B_2} = \frac{1}{2}(B_1B_2 + C_1C_2).BC$$

$$= \frac{1}{2}\left[(b-a)+(c-a)\right]BC$$

$$= \frac{1}{2}(b+c-2a).BC\,.$$

Từ đó suy ra thể tích của khối chóp $A_1.B_1C_1C_2B_2$ là :

$$V_{A_1.B_1C_1C_2B_2} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(b+c-2a).BC.A_1I = \frac{1}{3}(b+c-2a).S\,. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra :

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = V_{ABC.A_1B_2C_2} + V_{A_1.B_1C_1C_2B_2}$$

$$= S.a + \frac{1}{3}(b+c-2a)S$$

$$= \frac{1}{3}(a+b+c)S\,.$$

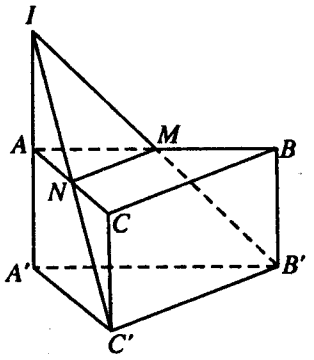
b) $V_{ABCA_1B_1C_1} = V_{A_1B_1C_1A'B'C'}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)S = \frac{1}{2}Sh$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c) = 3h.$$

5. Gọi I là giao điểm của đường thẳng MB' và đường thẳng AA', N là giao điểm của IC' và AC (h.30). Thiết diện của khối lăng trụ khi cắt bởi mp$(B'C'M)$ là hình thang cân $B'C'NM$. Mặt phẳng $(B'C'M)$ chia khối lăng trụ thành hai phần, gọi V_1 là thể tích của phần chứa cạnh AA' và V_2 là thể tích phần còn lại.

Giả sử khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy là S và chiều cao $AA' = h$. Khi đó ta có



Hình 30

$$V_1 = V_{AMN.A'B'C'} = V_{I.A'B'C'} - V_{I.AMN} = \frac{1}{3}S_{A'B'C'}.IA' - \frac{1}{3}S_{AMN}.IA$$

$$= \frac{1}{3}S.2h - \frac{1}{3}\frac{S}{4}.h = \frac{7}{12}Sh = \frac{7}{12}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{7}{12}(V_1 + V_2).$$

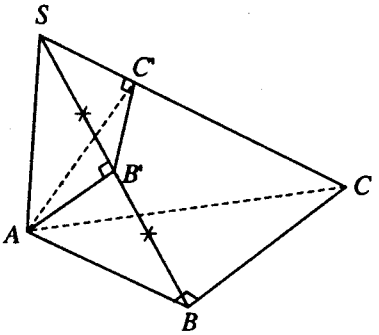
Từ đó suy ra : $12V_1 = 7(V_1 + V_2)$ hay $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

6. (h.31)

a) $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.BC.SA = \frac{a^3}{6}$.

b) Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp$ mp(SAB), do đó $AB' \perp BC$. Ngoài ra $AB' \perp SB$ nên $AB' \perp SC$. Nhưng theo giả thiết $AC' \perp SC$, vậy $SC \perp$ mp$(AB'C')$.

c) *Cách 1.* Khối chóp $S.AB'C'$ có đường cao SC' và có đáy là tam giác $AB'C'$ vuông tại B'. Ta có :



Hình 31

$$SC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2 = 3a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{3}.$$

$$AB' = SB' = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} ; SC' = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$B'C'^2 = SB'^2 - SC'^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6} \Rightarrow B'C' = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Vậy :

$$V_{S.AB'C'} = \frac{1}{6}AB'.B'C'.SC' = \frac{1}{6}\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{\sqrt{6}}.\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{36}.$$

Cách 2. Ta có :

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{1}{2} \; ; \quad \frac{SC'}{SC} = \frac{SC'.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{1}{3}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Vì $V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6}$ nên $V_{S.AB'C'} = \frac{a^3}{36}$.

Trả lời các câu hỏi trắc nghiệm

1. (C), **2.** (D), **3.** (D), **4.** (B), **5.** (D), **6.** (D), **7.** (C), **8.** (C), **9.** (D), **10.** (D), **11.** (B), **12.** (C), **13.** (A), **14.** (D), **15.** (C), **16.** (C), **17.** (B), **18.** (D), **19.** (D), **20.** (B), **21.** (D), **22.** (A), **23.** (C), **24.** (A), **25.** (B), **26.** (C), **27.** (B), **28.** (B), **29.** (C), **30.** (A), **31.** (C), **32.** (D).

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

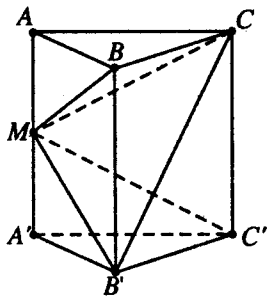
(Để giáo viên tham khảo)

Các đề kiểm tra 15 phút

Đề 1. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V và M là trung điểm của cạnh bên AA'. Cắt khối lăng trụ bằng hai mặt phẳng (MBC), $(MB'C')$, ta được ba khối chóp đỉnh M.

1. Kể tên ba khối chóp đó.

2. Tính thể tích của ba khối chóp nói trên theo V.



Hình 32

Đáp án và thang điểm (h.32)

1. (4 điểm). Ba khối chóp đó là :

$M.ABC$, $M.BCC'B'$, $M.A'B'C'$.

2. (6 điểm). Dễ thấy hai khối chóp tam giác $M.ABC$ và $M.A'B'C'$ cùng có đáy là đáy của khối lăng trụ và có chiều cao bằng một nửa chiều cao của khối lăng trụ. Vậy nếu gọi S, h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của khối lăng trụ thì :

$$V_{M.ABC} = V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}.S.\frac{1}{2}h = \frac{1}{6}S.h = \frac{1}{6}V.$$

$$V_{M.BCC'B'} = V - (V_{M.ABC} + V_{M.A'B'C'}) = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V.$$

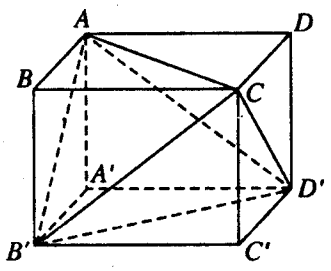
Đề 2. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

1. Chứng minh tứ diện $ACB'D'$ là tứ diện đều.

2. Chứng minh rằng bốn khối tứ diện sau đây có thể tích bằng nhau :

$D'DAC$, $B'ABC$, $AA'B'D'$, $CC'B'D'$.

Hãy tính thể tích của mỗi khối đó theo a.



Hình 33

Đáp án và thang điểm (h.33)

1. (4 điểm). Tứ diện $ACB'D'$ có các cạnh đều là đường chéo của các mặt của khối lập phương nên chúng bằng nhau (bằng $a\sqrt{2}$). Vậy $ACB'D'$ là tứ diện đều.

2. (6 điểm). Bốn khối tứ diện nêu trong bài toán là bốn khối chóp tam giác :

$$D'.DAC,\ B'.ABC,\ A.A'B'D',\ C.C'B'D'.$$

Bốn khối này có các mặt đáy bằng nhau ($\Delta DAC = \Delta BAC = \Delta A'B'D' = \Delta C'B'D'$) và có chiều cao bằng nhau (đều bằng a) nên chúng có thể tích bằng nhau.

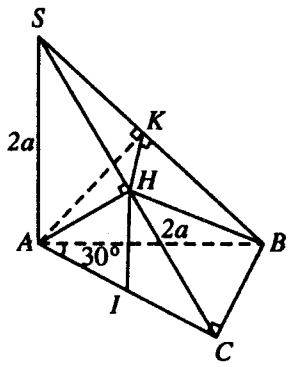
Ta có $V_{D'.DAC} = \frac{1}{3}S_{DAC}.DD' = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.a = \frac{a^3}{6}$.

Vậy thể tích của mỗi khối bằng $\frac{a^3}{6}$.

Các đề kiểm tra 45 phút

Đề 1. Cho khối chóp $S.ABC$ có đường cao SA bằng $2a$, tam giác ABC vuông ở C có $AB = 2a$, $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SC và SB.

1. Tính thể tích khối chóp $H.ABC$.
2. Chứng minh rằng $AH \perp SB$ và $SB \perp (AHK)$.
3. Tính thể tích khối chóp $S.AHK$.



Hình 34

Đáp án và thang điểm (h.34)

1. (4 điểm)

Cách 1. Trong mặt phẳng (SAC), kẻ HI song song với SA thì $HI \perp (ABC)$.

Vậy $V_{H.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.HI$.

Ta có $CA = AB.\cos 30^\circ = a\sqrt{3}$. Do đó

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.2a.a\sqrt{3}.\sin 30^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có :

$$\frac{HI}{SA} = \frac{HC}{SC} = \frac{HC.SC}{SC^2} = \frac{AC^2}{SC^2} = \frac{AC^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3a^2}{4a^2 + 3a^2} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow HI = \frac{6}{7}a.$$

Vậy $V_{H.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.HI = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{6}{7}a = \frac{a^3\sqrt{3}}{7}$.

Cách 2. $V_{H.ABC} = V_{B.AHC} = \frac{1}{3}S_{AHC}.BC$.

2. (3 điểm). Ta có $AH \perp SC$, $AH \perp CB$ (do $CB \perp (SAC)$), suy ra $AH \perp (SBC)$ $\Rightarrow AH \perp SB$.

Lại có : $SB \perp AK$, suy ra $SB \perp (AHK)$.

3. (3 điểm). Tam giác SAB cân ở A nên $SK = \frac{1}{2}SB$.

Cách 1. Theo kết quả bài tập 23, ta có

$$\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SH}{SC}.\frac{SK}{SB} = \frac{1}{2}.\frac{SH}{SC} = \frac{1}{2}\frac{SH.SC}{SC^2} = \frac{1}{2}\frac{SA^2}{SA^2 + AC^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4a^2}{4a^2 + 4a^2\cos^2 30^o} = \frac{2}{7}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy : $V_{S.AHK} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.\frac{2}{7} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{21}$.

Cách 2. $V_{S.AHK} = \frac{1}{3}S_{AHK}.SK$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có thể tính dễ dàng AH, HK và SK. Từ đó, ta tính được thể tích khối chóp $S.AHK$.

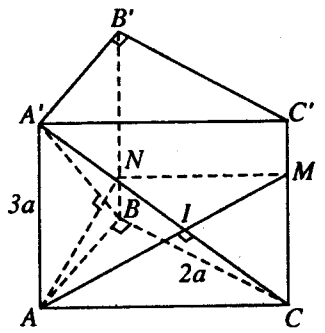
Đề 2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = 3a$. Một mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với CA' lần lượt cắt các đoạn thẳng CC' và BB' tại M và N.

1. Tính thể tích khối chóp $C.A'AB$.

2. Chứng minh rằng $AN \perp A'B$.

3. Tính thể tích khối tứ diện $A'AMN$.

4. Tính diện tích tam giác AMN.



Hình 35

Đáp án và thang điểm (h.35)

1. (2,5 điểm)

$$V_{C.A'AB} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.AA'$$

$$= \frac{1}{6}a.2a.3a = a^3.$$

2. (2,5 điểm). Ta có

$CB \perp AB$, $CB \perp AA'$ (do $AA' \perp (ABC)$), suy ra $CB \perp (A'AB)$.

Mặt khác $AN \perp CA'$ (do $CA' \perp (AMN)$) suy ra $AN \perp A'B$ (định lí ba đường vuông góc).

3. (2,5 điểm). Ta có :

$$V_{A'AMN} = V_{M.AA'N}$$
$$= V_{M.AA'B} \text{ (vì } NB \text{ // } AA')$$
$$= V_{C.AA'B} \text{ (do } MC \text{ // } (AA'B))$$
$$= a^3.$$

4. (2,5 điểm).

$$S_{AMN} = \frac{3.V_{A'.AMN}}{A'I}$$
$$= \frac{3.a^3}{\frac{(3a)^2}{\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (3a)^2}}}$$
$$= \frac{a^2\sqrt{14}}{3}.$$

Chương II

MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN

Mục tiêu của chương

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa của mặt cầu, vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng, giữa mặt cầu và đường thẳng, biết xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu trong một số trường hợp.

2. Hiểu được định nghĩa của mặt trụ, hình trụ, khối trụ, mặt nón, hình nón, khối nón. Xác định được giao tuyến của các hình đó với các mặt phẳng.

3. Nhớ và vận dụng được các công thức tính diện tích và thể tích của hình cầu, hình trụ, hình nón.

Phân phối thời gian (dự kiến)

§1. Mặt cầu	4 tiết.
§2. Khái niệm về mặt tròn xoay	1 tiết.
§3. Mặt trụ	2 tiết.
§4. Mặt nón	2 tiết.
Ôn tập chương	2 tiết.
Tổng số	11 tiết.

Những điều cần lưu ý

1. Mặt cầu là một ví dụ về mặt tròn xoay. Nếu chúng ta định nghĩa mặt tròn xoay trước thì mặt cầu có thể định nghĩa là mặt tròn xoay sinh bởi một đường tròn khi quay quanh một đường thẳng chứa đường kính của nó. Tuy nhiên, SGK không trình bày theo hướng đó. Định nghĩa đơn giản nhất của mặt cầu là tập hợp các điểm cách đều một *điểm cố định*, nó hoàn toàn tương tự như định nghĩa khái niệm đường tròn trong hình học phẳng.

Sau khi nêu ra khái niệm về mặt tròn xoay một cách tổng quát, cần làm cho học sinh thấy rằng ngoài mặt cầu là một mặt tròn xoay, còn có một số

mặt tròn xoay khác, trong đó có mặt trụ (đó là mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ song song với l và cách l một khoảng R) và mặt nón (mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng l khi quay quanh đường thẳng Δ cắt đường thẳng l và tạo với l một góc α cho trước $(0 < \alpha < 90^{\circ})$). Khái niệm mặt tròn xoay được giới thiệu nhằm giúp học sinh hiểu biết thêm một số mặt thường gặp trong thực tế như các đồ gốm sản xuất bằng bàn xoay, vòng xuyến, ... Ta không đi sâu vào các tính chất của mặt tròn xoay.

2. Các công thức về thể tích của khối cầu, khối trụ, khối nón đã được giới thiệu ở lớp 9 bậc THCS nhưng không chứng minh. Ở lớp 12, ta có thể chứng minh các công thức đó bằng cách dùng phương pháp tích phân của môn Giải tích. Tuy nhiên, dùng phương pháp tích phân để tính thể tích thì ít nhất cũng phải có khái niệm về thể tích của các khối bất kì (không phải là khối đa diện) và phải dựa vào công thức thể tích của khối trụ. Trong SGK Giải tích lớp 12, người ta công nhận thể tích khối trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao. Trong Hình học 12, chúng tôi cho rằng nên mô tả cho học sinh biết thế nào là thể tích của khối trụ tròn xoay (là giới hạn của thể tích khối lăng trụ đều nội tiếp khối trụ đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn) và từ đó, ta có thể suy ra ngay công thức về thể tích khối trụ mà học sinh đã biết ở lớp 9. Đối với diện tích xung quanh của khối trụ cũng thế. Hoàn toàn như vậy đối với thể tích và diện tích xung quanh của khối nón. Đối với khối cầu cũng có thể mô tả khái niệm diện tích và thể tích thông qua khái niệm "đa diện xấp xỉ" của mặt cầu, tuy nhiên không thể suy ra ngay các công thức như đã biết.

Việc tính toán về thể tích và diện tích của các khối cầu, trụ, nón theo chúng tôi là rất cần thiết, và do đó chúng tôi có đưa vào các bài tập cho học sinh rèn luyện và nhớ công thức.

§1 MẶT CẦU, KHỐI CẦU

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa mặt cầu, hình cầu, vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng, giữa mặt cầu và đường thẳng.
2. Nhận biết được một số hình đa diện có mặt cầu ngoại tiếp, xác định được tâm và tính được bán kính của mặt cầu đó.
3. Nhớ được các công thức về diện tích mặt cầu, thể tích hình cầu và áp dụng vào các bài tập.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Khái niệm mặt cầu được định nghĩa tương tự như khái niệm đường tròn trong mặt phẳng. Trong không gian Ơ-clit n chiều ($n \geq 1$), khái niệm mặt cầu (thường gọi là siêu cầu) được định nghĩa hoàn toàn giống nhau. Trong không gian 3 chiều, khái niệm mặt cầu khá là trực quan và dễ hiểu đối với học sinh. Luôn luôn có thể lấy hình ảnh trực quan để miêu tả các khái niệm mặt cầu, ví dụ : một quả bóng đặt trên mặt bàn là hình ảnh của một mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng, giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng có thể minh hoạ bằng việc cắt quả dưa hấu (thật "tròn") bởi một nhát cắt phẳng.
2. Phương pháp chứng minh mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu hoặc đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu tương tự như cách chứng minh đường thẳng tiếp xúc với đường tròn trong hình học phẳng. Tuy nhiên, cần nhấn mạnh rằng tại mỗi điểm thuộc mặt cầu, có vô số đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu và các đường thẳng ấy cùng nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm đó. Cũng cần lưu ý rằng : Nếu Δ là một đường thẳng tiếp xúc với một mặt cầu thì bất cứ mặt phẳng nào chứa Δ mà cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn thì Δ tiếp xúc với đường tròn đó.

III – TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

a) Ta có :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2$$

$$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}\right)^2$$

$$= 4\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + \overrightarrow{GD}^2 + 2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}).$$

Vì G là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, và vì cạnh của tứ diện đó bằng a nên $GA = GB = GC = GD = a\frac{\sqrt{6}}{4}$. Vậy ta có :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + \frac{3}{2}a^2.$$

b) Giả thiết đã cho của ví dụ 2 tương đương với :

$$2a^2 = 4MG^2 + \frac{3}{2}a^2 \Leftrightarrow MG = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

c) Vậy tập hợp các điểm M là mặt cầu tâm G, bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

2

$$M \in (P) \cap S(O;R) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ M \in S(O\,;\,R) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ OM = R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ HM^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - d^2. \end{cases}$$

3

a) Khi $d < R$, giao của (P) và $S(O\,;\,R)$ là đường tròn nằm trong (P), có tâm H và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

b) Khi $d = R$, giao của (P) và $S(O\,;\,R)$ là điểm H.

c) Khi $d > R$, giao của (P) và $S(O\,;\,R)$ là tập rỗng.

?1 Đúng.

4

a) Các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ của hình chóp nằm trên mặt phẳng đáy của hình chóp và đồng thời nằm trên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nên chúng nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt phẳng đáy và mặt cầu. Vậy đa giác đáy của hình chóp nội tiếp đường tròn đó.

b) Nếu hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$ có đáy $A_1\,A_2\ldots A_n$ là đa giác nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$ thì ta gọi Δ là trục của đường tròn đó và gọi O là giao điểm của Δ với mặt phẳng trung trực của một cạnh bên, chẳng hạn cạnh SA_1. Khi đó $OS = OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$. Vậy hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp, đó là mặt cầu tâm O bán kính $R = SO$.

?2 Hình tứ diện có thể xem là hình chóp mà đáy là tam giác, và vì tam giác luôn nội tiếp đường tròn nên tứ diện luôn nội tiếp mặt cầu.

?3 Nếu hình lăng trụ có cạnh bên không vuông góc với đáy thì nó phải có ít nhất một mặt bên là hình bình hành mà không phải là hình chữ nhật. Hình bình hành đó không nội tiếp đường tròn nên hình lăng trụ không nội tiếp mặt cầu.

?4 Mệnh đề a) đúng vì Δ tiếp xúc với $S(O\,;\,R)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} OH = R \\ OM > R \quad \forall M \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow OH \perp \Delta.$$

Mệnh đề b) đúng vì mọi đường thẳng vuông góc với OH tại H đều tiếp xúc với mặt cầu. Các đường thẳng đó nằm trên mặt phẳng vuông góc với OH tại H, đó chính là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H.

5

Vì O là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$ nên $OA = OB = OC = OD$. Từ đó suy ra các tam giác cân OAB, OAC, OAD, OBC, OCD, ODB bằng nhau. Vậy khoảng cách từ O tới các cạnh của tứ diện bằng nhau, chẳng hạn bằng h, suy ra tất cả các cạnh của tứ diện đều tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính h.

?5 Không, vì nếu h là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu tới đường thẳng đó thì $h \le OA < R$ (R là bán kính mặt cầu).

6

Vì AH là tiếp tuyến của đường tròn $(\mathscr{C})$ tại H nên khoảng cách từ O tới đường thẳng AH bằng R, vậy AH cũng tiếp xúc với mặt cầu tại H.

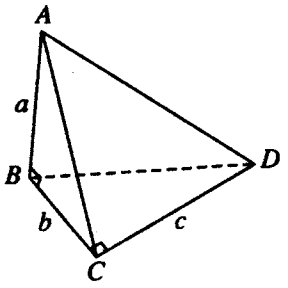
a) Trong tam giác vuông OHA, ta có $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{d^2 - R^2}$.

b) Vì HI là đường cao của tam giác vuông OHA nên $OI.OA = OH^2$ hay $OI = \dfrac{R^2}{d}$ (không đổi). Suy ra I là điểm cố định và do đó H nằm trên mp(P) vuông góc với OA tại I. Ngoài ra, vì H còn nằm trên mặt cầu $S(O ; R)$ nên H nằm trên đường tròn giao tuyến của mặt cầu và mp(P).

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

1. (h.36) Vì $AB \perp BC$ và $AB \perp CD$ nên $AB \perp BD$, tương tự ta có $DC \perp AC$. Vậy các điểm A, B, C, D cùng nằm trên mặt cầu đường kính AD.

Vì $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2$ nên bán kính mặt cầu đó là $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Hình 36

2. a) I là tâm của mặt cầu đi qua hai điểm phân biệt A, B cho trước khi và chỉ khi $IA = IB$. Vậy tập hợp tâm của các mặt cầu đó là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

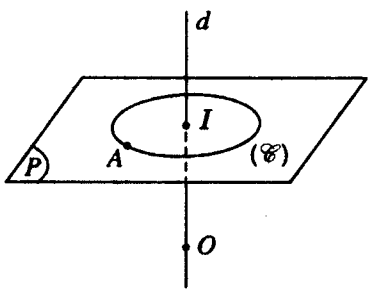
b) I là tâm của mặt cầu đi qua ba điểm phân biệt A, B, C cho trước khi và chỉ khi $IA = IB = IC$. Vậy :

+ Nếu ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì tập hợp các điểm I là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

+ Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tập hợp các điểm I là rỗng.

c) I là tâm của mặt cầu đi qua đường tròn ($\mathscr{C}$) cho trước khi và chỉ khi I cách đều mọi điểm của đường tròn. Vậy tập hợp các điểm I là trục của đường tròn ($\mathscr{C}$).

d) Gọi M là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa đường tròn ($\mathscr{C}$). Lấy điểm A nằm trên ($\mathscr{C}$) và gọi I là giao điểm của trục đường tròn và mặt phẳng trung trực của MA. Khi đó, mặt cầu tâm I, bán kính $R = IA = IM$ là mặt cầu đi qua đường tròn ($\mathscr{C}$) và đi qua điểm M.

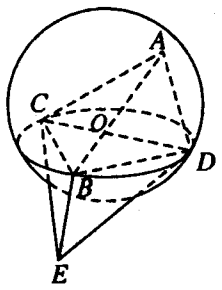


Hình 37

3. Cả a) và b) đều đúng.

4. Giả sử (S) là một mặt cầu đi qua A, có tâm O nằm trên d (h.37). Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d. Khi đó, (P) cắt mặt cầu (S)

theo đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm là giao điểm I của (P) và d, có bán kính $r = IA$. Vậy đường tròn ($\mathscr{C}$) cố định và mặt cầu (S) luôn luôn đi qua đường tròn cố định đó.



Hình 38

5. a) Đúng.

b) Không đúng. Ví dụ : Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu (S) (h.38). Lấy một điểm E nằm khác phía với A đối với mp(BCD) sao cho E không nằm trên (S). Xét hình đa diện $ABCDE$ có sáu mặt là các tam giác ABC, ABD, ADC, EBC, ECD, EDB. Các mặt đó đều nội tiếp đường tròn nhưng hình đa diện $ABCDE$ không nội tiếp mặt cầu.

Thật vậy, nếu có mặt cầu đi qua các đỉnh A, B, C, D, E thì nó phải đi qua A, B, C, D nên nó chính là mặt cầu (S), nhưng E lại không nằm trên (S), vô lí.

6. (h.39)

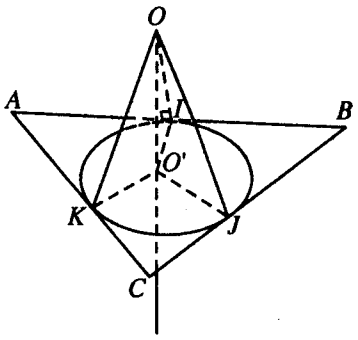
a) Mặt cầu tâm O tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA (của tam giác ABC) lần lượt tại các điểm I, J, K khi và chỉ khi

$OI \perp AB, OJ \perp BC, OK \perp CA, OI = OJ = OK.$ (*)

Gọi O' là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mp(ABC) thì các điều kiện (*) tương đương với

$O'I \perp AB, O'J \perp BC, O'K \perp CA, O'I = O'J = O'K,$

hay O' là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



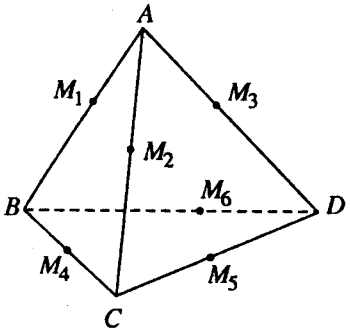
Hình 39

Từ đó suy ra tập hợp các điểm O là trục của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Giả sử có mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của tứ diện $ABCD$ tại các điểm M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 như trên hình 40. Khi đó ta có :

$$AM_1 = AM_2 = AM_3,\ BM_1 = BM_6 = BM_4,$$

$$CM_5 = CM_2 = CM_4,\ DM_5 = DM_6 = DM_3.$$



Hình 40

Suy ra :

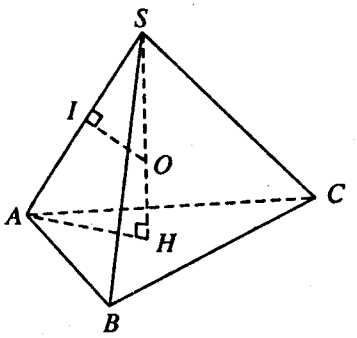
$$AM_1 + BM_1 + CM_5 + DM_5$$
$$= AM_2 + CM_2 + BM_6 + DM_6$$
$$= AM_3 + DM_3 + BM_4 + CM_4$$

hay $AB + CD = AC + BD = AD + BC.$

Chú ý. Mệnh đề đảo của câu b) cũng đúng, tức là : nếu tứ diện có tổng các cạnh đối bằng nhau thì có mặt cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện.

7. a) Giả sử SH là đường cao của hình chóp đều $S.ABC$ (h.41). Khi đó, vì $SA = SB = SC$ nên mọi điểm nằm trên SH cách đều A, B và C.

Trong mặt phẳng (SAH), đường trung trực của SA cắt SH tại O thì O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính của mặt cầu là $R = SO$.



Hình 41

Gọi I là trung điểm của SA thì tứ giác $AHOI$ nội tiếp nên

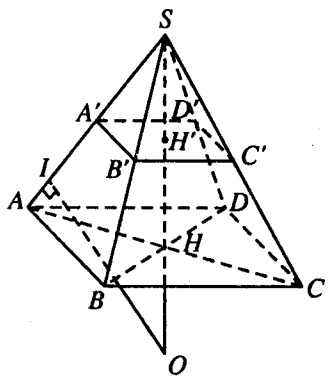
$$SO.SH = SI.SA \text{ hay } SO = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{SA^2}{2h}.$$

Ta có $SA^2 = SH^2 + AH^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2 + 3h^2}{3}$.

Suy ra $R = SO = \frac{a^2 + 3h^2}{6h}$.

Vậy thể tích khối cầu phải tìm là $\frac{\pi\left(a^2 + 3h^2\right)^3}{162h^3}$.

b) Gọi SH là đường cao của hình chóp đều $S.ABCD$ thì H là tâm của hình vuông $ABCD$ và SH đi qua tâm H' của hình vuông $A'B'C'D'$ (h.42). Mọi điểm nằm trên SH đều cách đều bốn điểm A, B, C, D và cũng cách đều bốn điểm A', B', C', D'. Trên đường thẳng SH, ta xác định điểm O sao cho $OA = OA'$ thì O cách đều tám điểm A, B, C, D, A', B', C', D', tức là tám điểm đó nằm trên mặt cầu tâm O, bán kính $R = OA$. Điểm O là giao điểm của đường thẳng SH và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AA'.



Hình 42

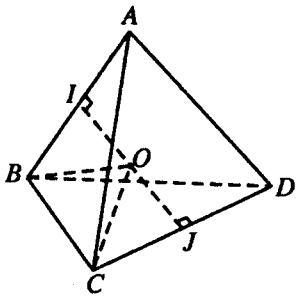
Ta chú ý rằng SAC là tam giác vuông cân. Gọi I là trung điểm của AA' thì SIO cũng là tam giác vuông cân đỉnh I nên $OI = SI = \frac{3a}{4}$. Suy ra :

$$R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Vậy thể tích khối cầu phải tìm là $\frac{5\pi a^3\sqrt{10}}{24}$.

8. a) (h.43) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì dễ thấy $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$, bởi vậy nếu gọi O là trung điểm của IJ thì $OA = OB$ và $OC = OD$. Ngoài ra, vì $AB = CD = c$ nên hai tam giác vuông OIB và OJC bằng nhau, do đó $OB = OC$. Vậy O cách đều bốn đỉnh A, B, C, D. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm O và có bán kính $R = OA$. Ta có :



Hình 43

$$OA^2 = OI^2 + AI^2 = \frac{IJ^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = \frac{IJ^2 + c^2}{4}.$$

Vì CI là trung tuyến của tam giác ABC nên

$$CI^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Suy ra $IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$.

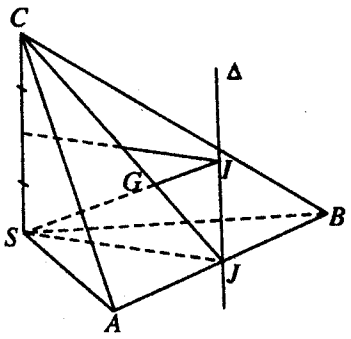
Như vậy $R^2 = OA^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$ và diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là :

$$S = 4\pi R^2 = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

b) Các mặt của hình tứ diện là các tam giác bằng nhau (đều có ba cạnh bằng a, b, c) nên các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đó có bán kính r bằng nhau. Các đường tròn đó đều nằm trên mặt cầu $(O ; R)$ nên khoảng cách từ tâm O tới các mặt phẳng chứa các đường tròn đó bằng nhau và bằng $h = \sqrt{R^2 - r^2}$.

Vậy mặt cầu tâm O, bán kính h là mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

9. (h.44) Gọi J là trung điểm của AB. Vì tam giác SAB vuông ở S nên $JS = JA = JB$. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với mp(SAB) tại J thì mọi điểm trên Δ đều cách đều ba điểm S, A, B. Bởi vậy, nếu gọi I là giao điểm của Δ và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng SC thì I cách đều bốn điểm S, A, B, C. Vậy mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$ có tâm I và có bán kính $R = IA$.



Hình 44

Ta có

$$R^2 = IA^2 = IJ^2 + AJ^2$$
$$= \left(\frac{SC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

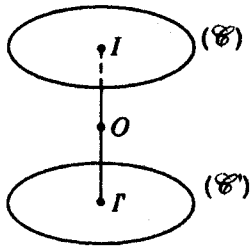
Diện tích mặt cầu là :

$$S = 4\pi R^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2).$$

Vì $SC \,//\, IJ$ nên SI cắt CJ tại một điểm G và do $SC = 2IJ$ nên $CG = 2GJ$. Vì CJ là trung tuyến của tam giác ABC nên G là trọng tâm tam giác ABC.

10. a) Nếu $\mathscr{H}$ là hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp thì các mặt bên là những hình bình hành có đường tròn ngoại tiếp nên phải là hình chữ nhật. Vậy $\mathscr{H}$ là lăng trụ đứng. Ngoài ra, vì $\mathscr{H}$ có mặt cầu ngoại tiếp nên mặt đáy phải là đa giác có đường tròn ngoại tiếp.

Ngược lại, cho $\mathscr{H}$ là lăng trụ đứng có các đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ ngoại tiếp các đa giác đáy (h.45). Gọi I và I' là tâm của hai đường tròn đó thì II' là trục của cả hai đường tròn. Vì thế, nếu gọi O là trung điểm của đoạn thẳng II' thì O cách đều tất cả các đỉnh của hình lăng trụ đã cho. Vậy hình lăng trụ ấy có mặt cầu ngoại tiếp.



Hình 45

b) Nếu hình hộp $\mathscr{H}$ nội tiếp mặt cầu $S(O ; R)$ thì các mặt của $\mathscr{H}$ phải là những hình chữ nhật, vậy $\mathscr{H}$ là hình hộp chữ nhật mà O là giao điểm của các đường chéo và độ dài đường chéo là $d = 2R$. Gọi x, y, z là ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó thì $x^2 + y^2 + z^2 = d^2 = 4R^2$.

Gọi S là diện tích toàn phần của hình hộp thì ta có :

$$S = 2xy + 2yz + 2zx \le x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 + x^2 = 8R^2.$$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất là $8R^2$ khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, tức là khi $\mathscr{H}$ là hình lập phương.

§2 KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Có hình dung trực quan về các mặt tròn xoay và hình tròn xoay, qua đó nhận ra những đồ vật trong thực tế có dạng tròn xoay như các đồ gốm chế tạo bằng bàn xoay, các sản phẩm chế tạo bằng máy tiện.
2. Hiểu được các hình đang học trong chương này đều là những hình tròn xoay.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Nếu có điều kiện, giáo viên nên dùng các dụng cụ chuẩn bị trước để cho học sinh thấy hình tròn xoay được tạo thành như thế nào khi quay một hình nào đó quanh một đường thẳng cố định.
2. Nếu giới thiệu khái niệm phép quay quanh một trục trong không gian thì có thể định nghĩa hình tròn xoay một cách chính xác như sau : Một hình gọi là hình tròn xoay nếu có một đường thẳng Δ cố định sao cho các phép quay quanh Δ với góc quay tuỳ ý đều biến hình ấy thành chính nó.

   Tuy nhiên, do chương trình THPT không đưa vào khái niệm phép quay quanh một trục trong không gian nên SGK định nghĩa hình tròn xoay theo một cách khác. Cụ thể là : khi M thay đổi trên hình $\mathscr{H}$ nào đó, hình gồm các đường tròn $(\mathscr{C}_M)$ cùng có chung một trục Δ gọi là hình tròn xoay sinh bởi $\mathscr{H}$ khi quay quanh Δ.

III – TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

? Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M, vuông góc với Δ và O là giao điểm của (P) và Δ.

Khi đó $(\mathscr{C}_M)$ là đường tròn nằm trên (P) có tâm O và bán kính $R = OM$.

§3 MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa của mặt trụ, phân biệt được ba khái niệm : mặt trụ, hình trụ và khối trụ. Xác định được giao của mặt trụ với một mặt phẳng vuông góc hoặc song song với trục của mặt trụ.
2. Nhớ công thức tính thể tích của khối trụ, diện tích xung quanh của hình trụ và vận dụng vào các bài tập.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Mặt trụ dưới dạng tổng quát có thể định nghĩa như sau : cho một đường (L) nằm trong mặt phẳng (P) và f là một phép chiếu song song lên (P). Tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $f(M) \in (L)$ được gọi là một mặt trụ có đường chuẩn là (L). Các đường thẳng d mà $f(d)$ là một điểm thuộc (L) được gọi là các đường sinh của mặt trụ đó.

   Khi (L) là đường tròn và f là phép chiếu vuông góc thì mặt trụ trở thành mặt trụ tròn xoay. Vậy có thể có nhiều cách định nghĩa mặt trụ tròn xoay. Ví dụ :

   + Mặt trụ tròn xoay là tập hợp $\mathscr{H}$ gồm các điểm (trong không gian) sao cho có một mặt phẳng (P) mà hình chiếu vuông góc của $\mathscr{H}$ trên (P) là một đường tròn.

+ Mặt trụ tròn xoay là hình tạo bởi các tiếp tuyến của mặt cầu cho trước và song song với một đường thẳng cho trước.

+ Mặt trụ tròn xoay là hình gồm tất cả các đường thẳng song song và cách đều một đường thẳng Δ cho trước.

+ Mặt trụ tròn xoay là tập hợp các điểm cách đều một đường thẳng cố định Δ cho trước.

+ Mặt trụ tròn xoay là mặt tròn xoay sinh bởi một đường thẳng d khi quay quanh đường thẳng cố định Δ song song với d.

SGK đã dùng định nghĩa cuối cùng vì chúng tôi cho là đơn giản nhất và về mặt hình thức, nó là trường hợp riêng của định nghĩa mặt tròn xoay nói chung.

2. Nội dung kiến thức của bài học không có gì phức tạp. Tuy nhiên cần làm cho học sinh phân biệt giữa mặt trụ, hình trụ và khối trụ, hiểu rõ khái niệm về trục, đường sinh và bán kính của mặt trụ.

3. Định nghĩa về thể tích và diện tích xung quanh của khối trụ khá đơn giản vì học sinh đã biết về thể tích và diện tích xung quanh của khối lăng trụ đều nội tiếp khối trụ. Từ đó, ta suy ra ngay các công thức mà học sinh đã phải thừa nhận ở lớp 9.

III. TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

Xác định giao của mặt trụ $\mathcal{T}$ có trục Δ, bán kính R với mp(P) :

a) (P) đi qua Δ thì giao là hai đường sinh đối xứng với nhau qua Δ.

b) (P) // Δ. Khi đó gọi d là khoảng cách giữa Δ và (P), ta có :

+ Nếu $d > R$ thì giao là tập rỗng ;

+ Nếu $d = R$ thì giao là một đường sinh ;

+ Nếu $0 < d < R$ thì giao là một cặp đường sinh ;

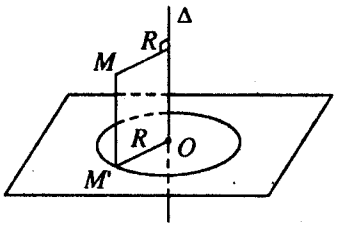
c) (P) $\perp$ Δ thì giao là đường tròn có bán kính R.

IV. TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

11. Xét mặt tròn xoay $\mathcal{H}$ có trục là Δ. Mọi mặt phẳng (P) đi qua Δ đều là mặt phẳng đối xứng của $\mathcal{H}$. Thật vậy, nếu $M \in \mathcal{H}$ và M' là điểm đối xứng với M qua mp(P) thì M' cũng nằm trên đường tròn $(\mathcal{C}_M)$ nên $M' \in \mathcal{H}$.

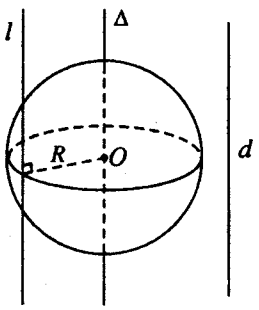
12. a) Hình trụ. b) Khối trụ.

13. Gọi Δ là trục của đường tròn $(O\ ;\ R)$ (h.46). Nếu điểm M có hình chiếu M' nằm trên $(O\ ;\ R)$ thì $MM' \,//\, \Delta$ và khoảng cách từ M tới Δ bằng $M'O = R$. Vậy tập hợp các điểm M như thế là mặt trụ có trục là Δ và có bán kính bằng R.



Hình 46

14. Cho mặt cầu $S(O\ ;\ R)$ và đường thẳng d (h.47). Gọi Δ là đường thẳng đi qua O và song song với d. Nếu l là tiếp tuyến của mặt cầu và $l \,//\, d$ thì $l \,//\, \Delta$ và l cách Δ một khoảng không đổi R. Vậy l nằm trên mặt trụ có trục là Δ và có bán kính bằng R.



Hình 47

15. Từ giả thiết ta suy ra hình trụ có bán kính đáy bằng R và đường sinh bằng $2R$. Từ đó suy ra :

a) $S_{xq} = 2\pi R.2R = 4\pi R^2$;

$S_{TP} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$.

b) $V = \pi R^2.2R = 2\pi R^3$.

c) Hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp $\mathcal{C}$ là hình lăng trụ đứng có cạnh bên bằng $2R$ và có đáy là hình vuông cạnh $R\sqrt{2}$ nên có thể tích

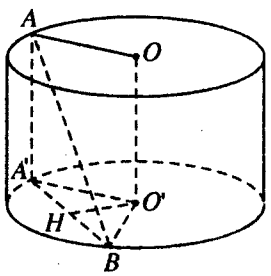
$$V_{LT} = 2R^2.2R = 4R^3.$$

16. a) $S_{xq} = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2$.

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\sqrt{3}\pi R^2 + 2\pi R^2 = 2(\sqrt{3} + 1)\pi R^2$.

b) $V = \pi R^2.R\sqrt{3} = \sqrt{3}\pi R^3$.

c) Gọi O và O' là tâm của hai đường tròn đáy (h.48). Theo giả thiết, $OA = O'B = R$. Gọi AA' là đường sinh của hình trụ thì $O'A' = R$, $AA' = R\sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAA'}$ bằng 30°. Vì $OO' \,//\, \text{mp}(ABA')$ nên khoảng cách giữa OO' và AB bằng khoảng cách giữa OO' và $\text{mp}(ABA')$. Gọi H là trung điểm BA' thì khoảng cách đó bằng $O'H$.



Hình 48

Tam giác $BA'A$ vuông tại A' nên

$$BA' = AA' \tan 30^\circ = R\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = R.$$

Như vậy, $BA'O'$ là tam giác đều và do đó $O'H = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

§4 MẶT NÓN, HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa của mặt nón, phân biệt được ba khái niệm : mặt nón, hình nón và khối nón. Xác định được giao của mặt nón với một mặt phẳng vuông góc với trục hoặc đi qua đỉnh của mặt nón, hình nón.
2. Nhớ công thức tính thể tích của khối nón, diện tích xung quanh của hình nón và vận dụng vào các bài tập.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Mặt nón dưới dạng tổng quát có thể định nghĩa như sau : Cho một đường (L) nằm trong mặt phẳng (P) và một điểm O không nằm trên (P). Tập hợp gồm điểm O và các điểm M sao cho đường thẳng OM cắt (L) được gọi là một mặt nón đỉnh O và có đường chuẩn là (L). Các đường thẳng OM nói trên được gọi là các đường sinh của mặt nón đó.

   Khi (L) là đường tròn và O thuộc trục của đường tròn thì mặt nón trở thành mặt nón tròn xoay. Vậy có thể có nhiều cách định nghĩa mặt nón tròn xoay. Ví dụ :

   + Mặt nón tròn xoay là hình tạo bởi các tiếp tuyến của mặt cầu cho trước và đi qua một điểm cho trước nằm ngoài mặt cầu

   + Mặt nón tròn xoay là hình gồm tất cả các đường thẳng đi qua một điểm O cố định và góc giữa mỗi đường thẳng đó và một đường thẳng cố định bằng α không đổi $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$.

   + Mặt nón tròn xoay là tập hợp gồm điểm O nằm trên một đường thẳng cố định Δ và các điểm M khác O sao cho góc giữa OM và Δ bằng α cho trước $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$.

+ Mặt nón tròn xoay là mặt tròn xoay sinh bởi một đường thẳng d khi quay quanh đường thẳng cố định Δ cắt d nhưng không vuông góc với d.

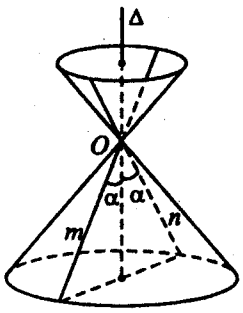
SGK đã dùng định nghĩa cuối cùng vì chúng tôi cho là đơn giản nhất sau khi có định nghĩa mặt tròn xoay một cách tổng quát.

2. Nội dung kiến thức của bài học không có gì khó. Tuy nhiên, cần làm cho học sinh phân biệt giữa mặt nón, hình nón và khối nón, hiểu rõ khái niệm về trục, đường sinh và bán kính đáy của hình nón.

3. Cũng giống như khối trụ, SGK có nói đến định nghĩa về thể tích và diện tích xung quanh của khối nón và suy ra các công thức mà học sinh phải công nhận ở lớp 9.

III. TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

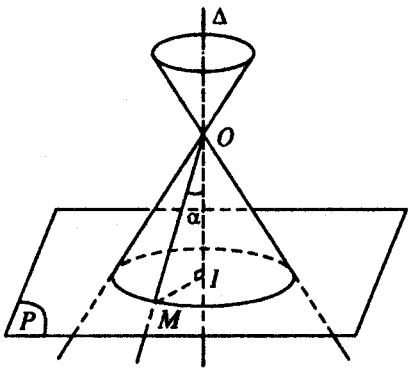
?1 a) Giả sử mp(P) đi qua trục Δ của mặt nón $\mathcal{N}$ (h.49). Trong (P) có hai đường thẳng m, n đi qua O và góc giữa Δ với m, n cùng bằng α (giả sử góc ở đỉnh của mặt nón bằng 2α). Khi đó, m và n là hai đường sinh của mặt nón $\mathcal{N}$. Vậy mp(P) cắt mặt nón $\mathcal{N}$ theo hai đường sinh m và n đối xứng với nhau qua Δ.



Hình 49

b) Giả sử mp(P) vuông góc với Δ tại điểm I (h.50). Mỗi đường sinh của mặt nón cắt (P) tại một điểm M sao cho $IM = OI.\tan\alpha$. Suy ra M nằm trên đường tròn tâm I, bán kính $R = OI.\tan\alpha$ và nằm trong (P). Vậy mp(P) cắt mặt nón theo đường tròn đó.

Nếu cắt mặt nón bởi mặt phẳng vuông góc với trục tại O thì ta được giao là điểm O.



Hình 50

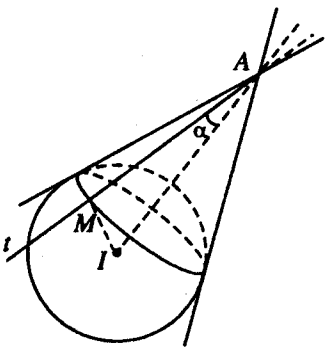
?2 Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục, ta được một tam giác cân OAB với đáy là đường kính AB của đường tròn đáy.

IV. TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

17. a) Hình nón.

b) Khối nón.

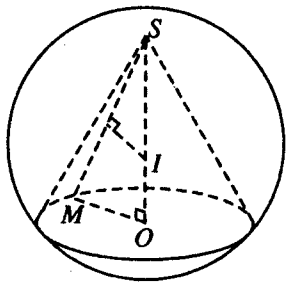
18. (h.51) Giả sử At là một tiếp tuyến của mặt cầu $S(I ; R)$ với tiếp điểm là M. Khi đó, nếu gọi Δ là đường thẳng AI và α là góc giữa đường thẳng At và Δ thì $\alpha = \widehat{MAI}$. Ta có $\sin\alpha = \dfrac{MI}{IA} = \dfrac{R}{IA}$, suy ra góc α không đổi. Vậy At là đường sinh của mặt nón $\mathcal{N}$ có đỉnh A, trục Δ và góc ở đỉnh bằng 2α.



Hình 51

19. a) Giả sử hình nón $\mathcal{N}$ có đỉnh S và đường tròn đáy là $(O ; r)$ (h.52). Lấy điểm M cố định trên $(O ; r)$ thì tam giác SOM vuông ở O. Điểm I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình nón khi và chỉ khi I nằm trên SO và cách đều hai điểm S, M. Vậy I là giao điểm của SO và mặt phẳng trung trực của SM nên nó xác định duy nhất.

Mặt cầu tâm I, bán kính $R = IS$ là mặt cầu ngoại tiếp duy nhất.



Hình 52

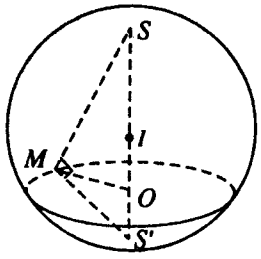
b) Gọi SS' là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình nón ($SS' > h$) (h.53). Tam giác SMS' vuông tại M, có đường cao MO nên :

$$MO^2 = OS.OS' \Rightarrow r^2 = h(SS' - h).$$

Suy ra $SS' = \dfrac{r^2}{h} + h = \dfrac{r^2 + h^2}{h}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón là

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}.$$



Hình 53

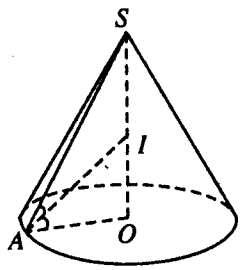
c) (h.53) Nếu hình nón có chiều cao h, bán kính đáy là r nội tiếp mặt cầu bán kính R thì theo câu b), ta có hệ thức $r^2 = h(2R - h)$.

Vậy $r = \sqrt{h(2R - h)}$.

Độ dài đường sinh là $l = SM = \sqrt{SS'.SO} = \sqrt{2R.h}$. Từ đó suy ra :

$$S_{xq} = \pi r l = \pi\sqrt{h(2R-h)}.\sqrt{2Rh} = \pi h\sqrt{2R(2R-h)}.$$

20. a) Giả sử hình nón có đỉnh S và có đáy là đường tròn $C(O\,;\,r)$ (h.54).



Hình 54

Nếu I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình nón thì I phải nằm trên SO. Thật vậy, nếu I không thuộc SO, ta gọi I' là giao điểm của SI và mặt phẳng đáy của hình nón. Mặt phẳng $(SI'O)$ cắt hình nón theo tam giác cân SAB. Điểm I không nằm trên đường phân giác SO của góc ASB nhưng lại cách đều SA, SB, vô lí.

Lấy điểm A cố định trên đường tròn đáy và gọi I là điểm nằm trên SO sao cho AI là phân giác của góc SAO. Điểm I như vậy hoàn toàn xác định và là tâm của mặt cầu nội tiếp hình nón, bán kính của mặt cầu đó là $R = IO$.

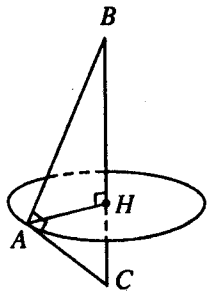
b) Ta có $SA = \sqrt{OS^2 + OA^2} = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Theo tính chất đường phân giác, ta có :

$$\frac{IO}{IS} = \frac{OA}{SA} \Rightarrow \frac{IO}{IO+IS} = \frac{OA}{OA+SA} \Rightarrow \frac{IO}{h} = \frac{r}{r+\sqrt{h^2+r^2}}.$$

Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là : $R = IO = \dfrac{rh}{r+\sqrt{h^2+r^2}}$.

21. Gọi $\mathscr{H}$ là hình tạo bởi tam giác ABC (kể cả các điểm trong) khi quay quanh đường thẳng BC (h.55). Nếu gọi AH là đường cao của tam giác ABC thì các tam giác BAH và CAH khi quay quanh BC lần lượt tạo thành hai khối nón $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích hai khối nón đó, ta có thể tích V của $\mathscr{H}$ là



Hình 55

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi AH^2.BH + \frac{1}{3}\pi AH^2.CH$$

$$= \frac{1}{3}\pi AH^2.BC = \frac{1}{3}\pi\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2} = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}.$$

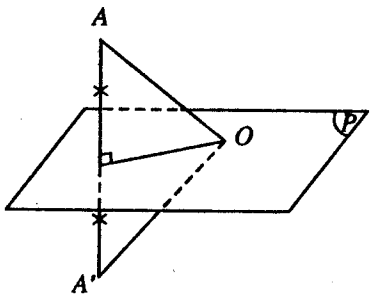
ÔN TẬP CHƯƠNG II

I – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Vì chỉ có 2 tiết ôn tập chương nên cần yêu cầu học sinh chuẩn bị ôn tập chu đáo ở nhà theo hướng dẫn trong SGK.
2. Nên lựa chọn 4 hoặc 5 bài tập ôn tập để chữa trên lớp, thông qua đó mà củng cố kiến thức và rèn kĩ năng cho học sinh.
3. Cho học sinh làm bài kiểm tra 45 phút.

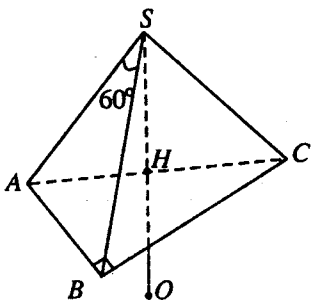
II – HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TẬP

1. Giả sử (S) là mặt cầu đi qua A và có tâm O nằm trên (P) (h.56). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) thì $OA' = OA$ nên mặt cầu (S) cũng đi qua A'. Vậy mặt cầu (S) luôn đi qua hai điểm cố định A và A'.



Hình 56

2. (h.57) Từ giả thiết đã cho, ta suy ra $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $AC = a\sqrt{3}$. Như vậy tam giác ABC vuông ở B. Gọi SH là đường cao của hình chóp thì do $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$ và do đó H chính là trung điểm của cạnh AC. Gọi O là điểm đối xứng với S qua điểm H thì dễ thấy $OS = OA = OC = OB = a$. Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có tâm O và có bán kính $R = a$.

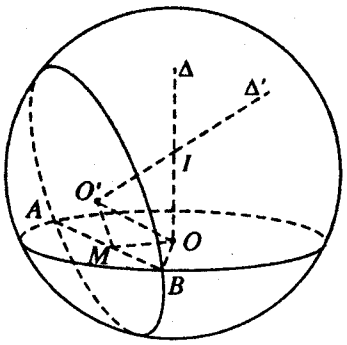


Hình 57

3. (h.58)

a) Gọi M là trung điểm của AB thì $OM \perp AB$, $O'M \perp AB$. Do (P) và (P') phân biệt nên ba điểm O, M, O' không thẳng hàng. Từ đó $AB \perp \text{mp}(OMO')$. (1)

Gọi Δ và Δ' lần lượt là trục của đường tròn $C(O\,;\,r)$ và $C'(O'\,;\,r')$ thì Δ và Δ' cùng vuông góc với AB. (2)



Hình 58

Từ (1) và (2) suy ra Δ và Δ′ cùng nằm trong mp(OMO'). Δ và Δ′ cắt nhau tại một điểm, giả sử là I. Khi ấy, mặt cầu ($\mathscr{C}$) có tâm I và bán kính $R = IB$ là mặt cầu phải tìm.

b) Dễ thấy $OM = 4$, $O'M = 1$. Xét tam giác OMO'; ta có

$$OO'^2 = OM^2 + O'M^2 - 2OM.O'M.\cos\widehat{OMO'},$$

tức là $21 = 16 + 1 - 2.4.1.\cos\widehat{OMO'}$,

suy ra $\cos\widehat{OMO'} = -\frac{1}{2}$.

Từ đó $\widehat{OMO'} = 120^\circ$ và $\widehat{OIO'} = 60^\circ$.

Tương tự, $\cos\widehat{MO'O} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, do đó $\sin\widehat{OO'I} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Xét tam giác OIO', ta có

$$\frac{OI}{\sin\widehat{OO'I}} = \frac{OO'}{\sin\widehat{OIO'}} \Leftrightarrow \frac{OI}{\frac{\sqrt{21}}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow OI = 2\sqrt{3}.$$

Như vậy $R^2 = IB^2 = OB^2 + OI^2 = 25 + 12 = 37$, tức là $R = \sqrt{37}$.

4. Theo giả thiết, hình nón $\mathscr{N}$ có bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$, có chiều cao $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, và có đường sinh $l = a$. Vậy nó có diện tích toàn phần S và thể tích V là :

$$S = \pi rl + \pi r^2 = \pi\frac{a^2}{2} + \pi\frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}\pi a^2 ;$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}.$$

a) Nếu mặt cầu bán kính R có diện tích bằng diện tích toàn phần S của hình nón thì : $4\pi R^2 = \frac{3}{4}\pi a^2$.

Suy ra $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) Nếu khối cầu bán kính R có thể tích bằng thể tích V của hình nón thì :

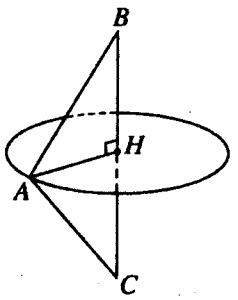
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}.$$

Suy ra $R = \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}}{4}a.$

5. a) Khi quay tam giác ABC quanh AB, ta được khối nón có chiều cao c và bán kính đáy là b nên nó có thể tích : $V_1 = \frac{1}{3}\pi c b^2$.

Khi quay tam giác ABC quanh AC, ta được khối nón có chiều cao b và bán kính đáy là c nên có thể tích : $V_2 = \frac{1}{3}\pi b c^2$.

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC (h.59). Khi quay tam giác ABC quanh BC, ta được hai khối nón sinh bởi hai tam giác ABH và ACH khi quay quanh BC. Bởi vậy ta có :



Hình 59

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BH + \frac{1}{3}\pi.AH^2.CH = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BC.$$

Vì $AH = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

và $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$ nên

$$V_3 = \frac{1}{3}\frac{\pi b^2 c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

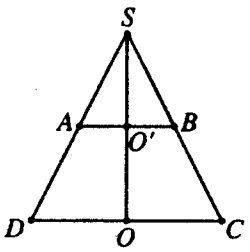
b) Ta có $\dfrac{1}{V_3^2} = \dfrac{9(b^2 + c^2)}{\pi^2 b^4 c^4}$

$$= \frac{9b^2}{\pi^2 b^4 c^4} + \frac{9c^2}{\pi^2 b^4 c^4}$$

$$= \left(\frac{3}{\pi c^2 b}\right)^2 + \left(\frac{3}{\pi b^2 c}\right)^2 = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_1^2}.$$

6. Gọi S là giao điểm của hai cạnh bên AD và BC của hình thang (h.60). Đường cao SO của tam giác cân SCD là trục đối xứng của hình thang, do đó SO cắt AB tại trung điểm O' của AB.

Khi quay quanh SO, tam giác SCD sinh ra khối nón $\mathcal{N}_1$ có thể tích V_1, tam giác SAB sinh ra khối nón $\mathcal{N}_2$ có thể tích V_2, còn hình thang $ABCD$ sinh ra một khối tròn xoay $\mathcal{H}$ có thể tích $V = V_1 - V_2$.



Hình 60

Vậy $$V = \frac{1}{3}\pi.OC^2.SO - \frac{1}{3}\pi.O'B^2.SO'$$

$$= \frac{1}{3}\pi.4a^2.SO - \frac{1}{3}\pi a^2.SO'$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^2(4SO - SO').$$

Chú ý rằng AB là đường trung bình của tam giác SCD nên $SB = 3a$ và do đó

$$SO' = \sqrt{SB^2 - O'B^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a \text{ và } SO = 2SO' = 4\sqrt{2}a.$$

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi a^2\left(16\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}a\right) = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi a^3.$

Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của khối nón $\mathfrak{N}_1$ và $\mathfrak{N}_2$ thì diện tích xung quanh của khối tròn xoay $\mathscr{H}$ là

$$S_{xq} = S_1 - S_2 = \pi.OC.SC - \pi.O'B.SB = 9\pi a^2.$$

Cộng thêm diện tích của hai hình tròn đáy của $\mathscr{H}$, ta được diện tích toàn phần của $\mathscr{H}$ là

$$S_{tp} = 9\pi a^2 + \pi a^2 + 4\pi a^2 = 14\pi a^2.$$

Trả lời các câu hỏi trắc nghiệm

1. (D), **2.** (B), **3.** (A), **4.** (D), **5.** (B), **6.** (B), **7.** (D), **8.** (C), **9.** (D), **10.** (D), **11.** (C), **12.** (C), **13.** (A), **14.** (D), **15.** (A), **16.** (A), **17.** (D), **18.** (A), **19.** (A), **20.** (A), **21.** (A), **22.** (A), **23.** (A), **24.** (D), **25.** (B), **26.** (B).

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

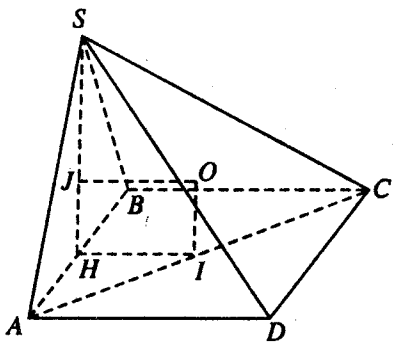
(Để giáo viên tham khảo)

Các đề kiểm tra 15 phút

Đề 1. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, *SAB* là tam giác đều và mp(*SAB*) vuông góc với mp(*ABCD*). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

Đáp án và thang điểm

Kẻ *SH* là đường cao của hình chóp thì *H* là trung điểm của *AB* (h.61). Gọi *I* là tâm của hình vuông *ABCD*, *J* là trọng tâm của tam giác đều *SAB*, và *O* là điểm sao cho *JOIH* là hình chữ nhật. Khi đó *OS* = *OA* = *OB* (vì *OJ* là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác *SAB*) và *OA* = *OB* = *OC* = *OD* (vì *OI* là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông *ABCD*).



Hình 61

Suy ra *O* là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho. (5 điểm)

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp là *R* = *OA*. Ta có :

$$OA^2 = AI^2 + OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{7a^2}{12}.$$

Vậy $R = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. (5 điểm)

Đề 2. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (*O* ; *R*) và (*O'* ; *R*), $OO' = R\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là *O'* và đáy là hình tròn (*O* ; *R*).

a) Tính tỉ số diện tích xung quanh của hình trụ và hình nón.

b) Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần, tính tỉ số thể tích của hai phần đó.

Đáp án và thang điểm (h.62)

a) (6 điểm) Diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_1 = 2\pi R.R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi R^2.$$

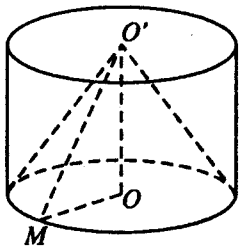
Lấy một đường sinh $O'M$ của hình nón thì

$$O'M = \sqrt{O'O^2 + OM^2} = \sqrt{3R^2 + R^2} = 2R.$$

Suy ra diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_2 = \pi R.2R = 2\pi R^2.$$

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$.



Hình 62

b) (4 điểm) Khối trụ và khối nón có cùng đáy và cùng chiều cao nên thể tích của khối trụ bằng ba lần thể tích của khối nón. Như vậy, mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần : khối nón và phần còn lại có thể tích bằng hai lần thể tích của khối nón. Vậy tỉ số thể tích của hai phần đó là $\dfrac{1}{2}$.

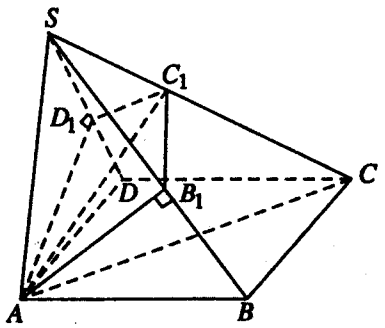
Các đề kiểm tra 45 phút

Đề 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = b$, đường cao của hình chóp là SA. Gọi B_1, C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC, SD.

a) Chứng minh các điểm A, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc mặt phẳng vuông góc với SC.

b) Chứng minh các điểm A, B, C, D, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt cầu. Xác định tâm và tính diện tích của mặt cầu.

c) Chứng minh rằng tứ giác $AB_1C_1D_1$ nội tiếp đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó khi $SA = AC$.



Hình 63

Đáp án và thang điểm (h.63)

a) (3 điểm) Vì $BC \perp AB$ và $BC \perp SA$ nên

$AB_1 \perp BC$, ngoài ra $AB_1 \perp SB$ nên

$AB_1 \perp (SBC)$. Vậy $AB_1 \perp SC$.

Tương tự $AD_1 \perp SC$.

Theo giả thiết ta có $AC_1 \perp SC$.

Vậy các đường thẳng AB_1, AC_1, AD_1 cùng vuông góc với SC, từ đó các điểm A, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc mặt phẳng vuông góc với SC.

b) (3 điểm) Theo chứng minh ở câu a) thì $AB_1 \perp$ mp(SBC), từ đó $\widehat{AB_1C} = 90^\circ$.

Tương tự $\widehat{AD_1C} = 90^\circ$.

Mặt khác, theo giả thiết $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{AC_1C} = 90^\circ$. Vậy các điểm A, B, C, D, B_1, C_1, D_1 nằm trên mặt cầu đường kính AC. Tâm mặt cầu là tâm O của hình chữ nhật $ABCD$. Bán kính mặt cầu là $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ nên diện tích mặt cầu là $S = \pi(a^2 + b^2)$.

c) (4 điểm). Theo câu a), bốn điểm A, B_1, C_1, D_1 đồng phẳng. Mặt khác, theo câu b), bốn điểm đó cùng nằm trên một mặt cầu nên $AB_1C_1D_1$ là tứ giác nội tiếp. Tứ giác đó có góc B_1 và D_1 vuông nên AC_1 là đường kính của đường tròn ngoại tiếp. Vì $SA = AC = \sqrt{a^2 + b^2}$ nên $AC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

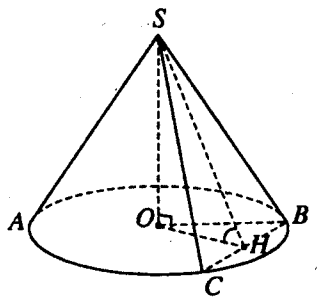
Vậy đường tròn đó có bán kính là $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Đề 2. Cắt hình nón $\mathcal{N}$ (đỉnh S) cho trước bởi mặt phẳng đi qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của $\mathcal{N}$.

b) Cho một dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mp(SBC) tạo với đáy hình nón một góc 60°. Tính diện tích tam giác SBC.

c) Tính diện tích và thể tích của hình cầu nội tiếp hình nón.



Hình 64

Đáp án và thang điểm

a) (4 điểm) Giả sử cắt hình nón $\mathcal{N}$ bởi mặt phẳng đi qua trục SO của nó, ta được tam giác vuông cân SAB (h.64).

Từ giả thiết suy ra $\mathfrak{N}$ có bán kính đáy là $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, chiều cao $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và đường sinh $l = a$. Vậy

$$S_{xq} = \pi Rl = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2};$$

$$S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \frac{(\sqrt{2}+1)\pi a^2}{2};$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}.$$

b) (3 điểm) Giả sử thiết diện là tam giác SBC. Kẻ $OH \perp BC$ thì $SH \perp BC$ và $\widehat{SHO} = 60^\circ$. Bởi vậy :

$$SH = \frac{SO}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Suy ra diện tích tam giác cân SBC là

$$S = SH.HB = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

c) (3 điểm) Mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu nội tiếp hình nón theo một đường tròn lớn nội tiếp tam giác SAB, vậy bán kính r của mặt cầu đó bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB. Suy ra :

$$r = \frac{2S_{SAB}}{AB + 2SA} = \frac{a^2}{a\sqrt{2} + 2a} = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}.$$

Vậy mặt cầu nội tiếp có diện tích :

$$S = 4\pi r^2 = \pi a^2(2-\sqrt{2})^2$$

và có thể tích : $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi\left(2-\sqrt{2}\right)^3 a^3}{6}.$

Chương III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Mục tiêu của chương

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa về toạ độ của vectơ và của điểm trong một hệ trục toạ độ cho trước, nhớ được mối liên hệ giữa toạ độ của vectơ và toạ độ của hai điểm mút.

2. Nhớ và vận dụng được các biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ, các công thức và cách tính các đại lượng hình học bằng toạ độ. Biết biểu thị chính xác bằng toạ độ các quan hệ hình học như : sự thẳng hàng của ba điểm, sự cùng phương của hai vectơ, sự đồng phẳng của ba vectơ, quan hệ song song, quan hệ vuông góc,...

3. Nhận dạng được các phương trình của đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu trong một hệ toạ độ cho trước. Viết được phương trình của đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu khi biết trước một số điều kiện.

4. Giải được một số bài toán của Hình học không gian bằng phương pháp toạ độ.

Phân phối thời gian (dự kiến)

§1. Hệ toạ độ trong không gian	5 tiết.
§2. Phương trình mặt phẳng	5 tiết.
§3. Phương trình đường thẳng	8 tiết.
Ôn tập chương	2 tiết.
Tổng số :	20 tiết.

Những điều cần lưu ý

1. Nội dung chương này có liên hệ mật thiết với chương "Phương pháp toạ độ trong mặt phẳng" ở lớp 10. Bởi vậy, các thầy cô nên hướng dẫn học sinh xem lại chương 3, Hình học 10 nâng cao, đặc biệt là §1.

Việc định nghĩa hệ toạ độ trong không gian, toạ độ của vectơ, toạ độ của điểm và các tính chất liên quan hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng nên có thể trình bày ngắn gọn. Cần tập trung vào việc luyện tập và rèn luyện kĩ năng tính toán cho học sinh.

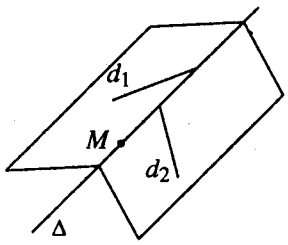
2. So với SGK trước đây, có nhiều vấn đề đã được lược bỏ, chẳng hạn : cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng, phương trình tham số của mặt phẳng, chùm mặt phẳng, phương trình tổng quát của đường thẳng, phương trình đường tròn trong không gian... Đề nghị các thầy cô cần lưu ý điều đó, nhất là khi lựa chọn thêm bài tập cho học sinh.

3. Về phương pháp giảng dạy :

+ Nên chú ý đúng mức tới yếu tố trực quan : hình vẽ, bảng biểu,... Về nguyên tắc, khi giải bài toán hình học bằng phương pháp toạ độ, ta không cần tới hình vẽ. Nhưng nhiều khi hình vẽ có thể giúp cho học sinh đưa ra được phương pháp giải hợp lí.

Để làm ví dụ, ta xét bài toán : "Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M có toạ độ đã cho và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình đã cho".

Dùng hình 65, ta làm cho học sinh thấy rằng đường thẳng Δ, nếu có, phải là giao tuyến của hai mặt phẳng : mp(d_1, M) và mp(d_2, M). Hơn thế, qua hình vẽ, các em cũng thấy rằng cần phải kiểm tra điều kiện giao tuyến đó phải cắt d_1 và d_2 trước khi đưa ra đáp số của bài toán.



Hình 65

Cố nhiên, có thể giải bài toán đó bằng cách khác, nhất là khi các đường thẳng d_1 và d_2 được cho bởi phương trình tham số. Khi đó, ta lấy hai điểm M_1 và M_2 lần lượt nằm trên d_1 và d_2 ứng với giá trị tham số t_1 và t_2 rồi tìm t_1 và t_2 sao cho ba điểm M, M_1, M_2 thẳng hàng.

+ Nên rèn luyện cho học sinh biết cách chuyển từ ngôn ngữ hình học sang ngôn ngữ đại số. Chẳng hạn, để chứng minh ba điểm A, B, C (với toạ độ đã biết) thẳng hàng thì phải tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ rồi chứng minh rằng chúng có toạ độ tương ứng tỉ lệ, hoặc trong một số trường hợp có thể tính toán để thấy $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \vec{0}$.

+ Cần làm cho học sinh thấy rằng để giải các bài toán bằng phương pháp toạ độ, cần phải thành thạo hai thao tác : "đọc" và "viết" sau đây :

Thao tác "đọc" : Khi cho trước phương trình của một đường hoặc một mặt, ta phải "đọc" được một số yếu tố liên quan. Chẳng hạn phương trình $x + 2y - 3z = 0$ cho ta một mặt phẳng đi qua gốc toạ độ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1 ; 2 ; -3)$, hoặc phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0$ cho ta một mặt cầu có tâm $I(1 ; 0 ; 0)$ và có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Thao tác "viết" : Khi đã biết các yếu tố xác định một đường hay một mặt nào đó, ta có thể viết được phương trình biểu thị các đối tượng đó.

+ Thầy cô giáo nên nghiên cứu và sử dụng các *Câu hỏi* ? và *Hoạt động* trong SGK để học sinh có điều kiện tham gia tích cực hơn trong giờ học. Nói chung, các *Câu hỏi* yêu cầu học sinh trả lời nhanh, còn các *Hoạt động* thì yêu cầu họ phải làm việc trên giấy nháp.

+ Trong các ví dụ về tính toán, SGK thường chọn những số liệu đơn giản, dễ tính toán nhằm mục đích không mất nhiều thời gian trên lớp. Đối với các bài tập về nhà, có thể ra những bài tính toán phức tạp hơn.

§1 HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được định nghĩa về toạ độ của một vectơ, của một điểm đối với một hệ toạ độ xác định trong không gian.

2. Hiểu và nhớ biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ, các công thức biểu thị quan hệ giữa các vectơ (cùng phương, đồng phẳng, vuông góc,...), các công thức về diện tích tam giác, thể tích khối hộp và khối tứ diện.

3. Hiểu và nhớ các công thức biểu thị mối quan hệ giữa các điểm (thẳng hàng, đồng phẳng, toạ độ của trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác và trọng tâm tứ diện,...).

4. Viết được phương trình của mặt cầu với các điều kiện cho trước. Xác định được tâm và tính được bán kính mặt cầu khi biết phương trình của nó.

5. Bước đầu biết vận dụng phương pháp toạ độ để giải các bài toán hình học không gian đơn giản.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Trước tiên, SGK nêu định nghĩa toạ độ của một vectơ $\vec{u}$ đối với một hệ toạ độ cho trước bằng cách biểu thị vectơ $\vec{u}$ theo ba vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Sau đó, SGK nêu định nghĩa toạ độ của một điểm thông qua toạ độ của một vectơ. Các câu hỏi ?2, ?3, ?4 và hoạt động 1 giúp cho học sinh hình dung một cách trực quan ý nghĩa hình học của các toạ độ x, y, z và xác định toạ độ đó trong một số trường hợp đặc biệt về vị trí của điểm M.

SGK không đòi hỏi học sinh phải có kĩ năng xác định toạ độ của một vectơ nào đó trên hình vẽ, vấn đề đó sẽ được giải quyết khi học sinh biết được sự liên hệ giữa toạ độ của một vectơ và toạ độ của hai điểm mút.

2. Tích có hướng là một khái niệm mới, quan trọng vì có nhiều ứng dụng về sau. Vì ta không có khái niệm về "hướng" của không gian nên không thể định nghĩa tích có hướng một cách hình học. Dùng toạ độ để định nghĩa tích có hướng là cách làm đơn giản và dễ hiểu hơn nhiều so với cách định nghĩa thuần tuý hình học. Khi biết toạ độ của hai vectơ, học sinh sẽ tìm ngay được toạ độ của vectơ tích có hướng của chúng.

Tuy nhiên, về nguyên tắc, để định nghĩa bằng toạ độ trở nên hợp lí, ta phải chứng minh rằng định nghĩa đó không phụ thuộc vào việc chọn hệ trục toạ độ có cùng hướng. Khi thay đổi hướng của hệ toạ độ, tích có hướng của hai vectơ sẽ đổi hướng. Nhưng hiển nhiên điều đó quá sức đối với học sinh nên SGK bỏ qua.

SGK cũng không trình bày hết các tính chất của tích có hướng (chẳng hạn tính chất phản giao hoán, tính chất phân phối,...). SGK chỉ nêu ba tính chất có nhiều áp dụng vào Hình học. Dùng các tính chất đó, học sinh có thể giải quyết các bài toán như : tìm một vectơ vuông góc với hai vectơ không cùng phương cho trước, tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng song song với hai đường thẳng cắt nhau cho trước, tìm vectơ chỉ phương của đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng cho trước, tính điều kiện để ba vectơ đồng phẳng, tính diện tích hình bình hành, hình tam giác, thể tích khối hộp, khối tứ diện,...

3. Khái niệm "tích có hướng" của hai vectơ cũng thường gặp trong Vật lí. Nó được định nghĩa một cách hình học như sau :

Vectơ $\vec{c}$ gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nếu :

+ $|\vec{c}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$;

+ Vectơ $\vec{c}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$;

+ Khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng có chung điểm đầu là O thì chúng tạo thành một tam diện thuận.

Từ định nghĩa trên, ta suy ra được biểu thức toạ độ của tích có hướng như đã trình bày trong SGK. Tuy nhiên, việc xây dựng biểu thức toạ độ của tích có hướng là khó đối với học sinh nên ta đã lấy biểu thức đó làm định nghĩa của tích có hướng.

III – TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

?1 Do các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ đều là những vectơ đơn vị và đôi một vuông góc.

?2 Vì $\vec{u} = (x ; y ; z)$ nên $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Do đó :

$$\vec{u}.\vec{i} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right).\vec{i} = x\vec{i}^{\,2} = x.$$

Tương tự : $\vec{u}.\vec{j} = y$ và $\vec{u}.\vec{k} = z$.

?3 a) $M \equiv O \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

b) $M \in (Oxy) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{k} = 0 \Leftrightarrow z = 0$, tức là $M = (x ; y ; 0)$.

$M \in (Oyz) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \vec{i} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{i} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tức là $M = (0 ; y ; z)$.

$M \in (Ozx) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{j} = 0 \Leftrightarrow y = 0$, tức là $M = (x ; 0 ; z)$.

?4 $M(x ; y ; z) \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0$, $M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0$,

$M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$.

1

a) $A = (2 ; 0 ; 0)$, $B = (3 ; 4 ; 0)$, $C = (0 ; 4 ; 4)$, $D = (1 ; 0 ; 5)$, $E = (3 ; 4 ; 3)$.

Để xác định điểm $P(3 ; 6 ; -3)$, có thể thực hiện theo hai cách :

Cách 1 : Ta có $\overrightarrow{OP} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$. Lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i}$, lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = 6\vec{j}$, và cuối cùng, lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{NP} = -3\vec{k}$.

Cách 2. Trên mặt phẳng (Oxy) xác định điểm $P'= (3 ; 6 ; 0)$. Điểm P là ảnh của P' qua phép tịnh tiến theo vectơ $-3\vec{k}$.

2

a) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

Vậy I có toạ độ :

$$x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \; ; \; y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_B), \; z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B).$$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Vậy G có toạ độ :

$$x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \; ; y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \; ; z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C).$$

c) Nếu E là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ thì $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

Vậy E có toạ độ :

$$x_E = \frac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D) \; ;$$

$$y_E = \frac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D) \; ;$$

$$z_E = \frac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D).$$

3

Ta có : $\vec{i} = (1 ; 0 ; 0)$; $\vec{j} = (0 ; 1 ; 0)$; $\vec{k} = (0 ; 0 ; 1)$ nên :

$$\left[\vec{i}, \vec{j}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (0;0;1) = \vec{k}.$$

Tương tự : $\left[\vec{j}, \vec{k}\right] = \vec{i}$; $\left[\vec{k}, \vec{i}\right] = \vec{j}$.

Chú ý rằng $\left[\vec{i}, \vec{j}\right] \neq \left[\vec{j}, \vec{i}\right]$, bằng tính toán dễ thấy rằng $\left[\vec{i}, \vec{j}\right] = -\left[\vec{j}, \vec{i}\right]$.

4

+ Giả sử ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng. Khi đó :

Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương thì $\left[\vec{u}, \vec{v}\right] = \vec{0}$ và do đó $\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\vec{w} = \vec{0}.\vec{w} = 0$.

Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương thì $\vec{w} = p\vec{u} + q\vec{v}$ nên :

$$\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w} = \left[\vec{u},\vec{v}\right].\left(p\vec{u} + q\vec{v}\right) = p\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{u} + q\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{v} = 0.$$

+ Ngược lại giả sử $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w} = 0$. Khi đó :

Nếu $\left[\vec{u},\vec{v}\right] = \vec{0}$ thì $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương và do đó $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng.

Nếu $\left[\vec{u},\vec{v}\right] \neq \vec{0}$ thì cả ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đều vuông góc với vectơ $\left[\vec{u},\vec{v}\right] \neq \vec{0}$ nên ba vectơ đó đồng phẳng.

5

Cách 1. Tâm I của mặt cầu là trung điểm của A_1A_2 nên

$$I = \left(\frac{a_1 + a_2}{2} ; \frac{b_1 + b_2}{2} ; \frac{c_1 + c_2}{2}\right),$$

bán kính mặt cầu là

$$R = \frac{1}{2}A_1A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}.$$

Vậy phương trình mặt cầu là :

$$\left(x - \frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{c_1 + c_2}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (a_1 + a_2)x - (b_1 + b_2)y - (c_1 + c_2)z + a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Cách 2. Giả sử $M = (x ; y ; z)$ thì

$$\overrightarrow{A_1M} = (x - a_1 ; y - b_1 ; z - c_1),\ \overrightarrow{A_2M} = (x - a_2 ; y - b_2 ; z - c_2).$$

Điểm M thuộc mặt cầu đường kính A_1A_2 khi và chỉ khi $\overrightarrow{A_1M} . \overrightarrow{A_2M} = 0$ hay :

$$(x - a_1)(x - a_2) + (y - b_1)(y - b_2) + (z - c_1)(z - c_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (a_1 + a_2)x - (b_1 + b_2)y - (c_1 + c_2)z + a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

6

Gọi $I\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$ là tâm mặt cầu thì $IA = IB = IC = ID$ hay :

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 = 0 \\ -2y + 1 = 0 \\ -2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Vậy $I = \left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$. Bán kính mặt cầu là

$$R = AI = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó mặt cầu có phương trình : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ hay

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0.$$

7

a) Không phải, vì hệ số của x^2, y^2 và z^2 không bằng nhau.

b) Là phương trình mặt cầu có tâm $(\frac{1}{3}\ ;\ 0\ ;\ 0)$, có bán kính bằng $\frac{1}{3}$.

c) Không phải, vì phương trình sau khi rút gọn vẫn còn chứa số hạng $-2xy$.

d) Phương trình rút gọn thành $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Đó là phương trình mặt cầu với tâm $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ và bán kính bằng 1.

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

1. a) $\vec{u} = (1\ ;\ -2\ ;\ 0)\ ;\ \vec{v} = (3\ ;\ 5\ ;\ -5)\ ;\ \vec{w} = (2\ ;\ 3\ ;\ -1)$.

b) $\cos(\vec{v}, \vec{i}) = \dfrac{\vec{v}.\vec{i}}{|\vec{v}|.|\vec{i}|} = \dfrac{3}{\sqrt{59}}$;

$\cos(\vec{v}, \vec{j}) = \dfrac{\vec{v}.\vec{j}}{|\vec{v}|.|\vec{j}|} = \dfrac{5}{\sqrt{59}}$;

$\cos(\vec{v}, \vec{k}) = \dfrac{\vec{v}.\vec{k}}{|\vec{v}|.|\vec{k}|} = \dfrac{-5}{\sqrt{59}}$.

c) $\vec{u}.\vec{v} = -7\ ;\ \vec{u}.\vec{w} = -4\ ;\ \vec{v}.\vec{w} = 26$.

2. Giả sử $\vec{u} = (x\,;y\,;z)$. Khi đó ta có :

$$\cos(\vec{u},\vec{i}) = \frac{\vec{u}.\vec{i}}{|\vec{u}|.|\vec{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

do đó $$\cos^2(\vec{u},\vec{i}) = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2},$$

tương tự :

$$\cos^2(\vec{u},\vec{j}) = \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\ ;\ \cos^2(\vec{u},\vec{k}) = \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

3. a) $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

b) $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{-8\sqrt{13}}{65}$.

4. Theo giả thiết $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 5, \cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Ta có $\vec{p} \perp \vec{q}$ khi và chỉ khi $\vec{p}.\vec{q} = 0$ hay

$$(k\vec{u} + 17\vec{v})(3\vec{u} - \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3k\vec{u}^2 - 17\vec{v}^2 + (51-k)\vec{u}.\vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3k.4 - 17.25 + (51-k)2.5\cos\frac{2\pi}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 17k - 680 = 0 \Leftrightarrow k = 40.$$

5. a) Gọi $M_1(x\,;y\,;0)$ là hình chiếu của điểm $M(a\,;b\,;c)$ trên mp(Oxy) thì

$$\overrightarrow{MM_1} = (x-a\,;y-b\,;-c).$$

Vì $\overrightarrow{MM_1}.\vec{i} = 0$ và $\overrightarrow{MM_1}.\vec{j} = 0$ nên $x - a = 0, y - b = 0$.

Vậy $M_1 = (a\,;b\,;0)$.

Tương tự, nếu M_2 là hình chiếu của M trên mp(Oyz) thì $M_2 = (0\,;b\,;c)$, nếu M_3 là hình chiếu của M trên mp(Oxz) thì $M_3 = (a\,;0\,;c)$.

Giả sử $M_x(x\,;0\,;0)$ là hình chiếu của $M(a\,;b\,;c)$ trên trục Ox thì $\overrightarrow{MM_x} = (x-a\,;-b\,;-c)$. Vì $\overrightarrow{MM_x}.\vec{i} = 0$ nên $x = a$, do đó $M_x = (a\,;0\,;0)$.

Tương tự, nếu M_y là hình chiếu của $M(a\,;b;c)$ trên trục Oy thì $M_y = (0\,;b\,;0)$, nếu M_z là hình chiếu của $M(a\,;b;c)$ trên trục Oz thì $M_z = (0\,;0\,;c)$.

b) $d(M,(Oxy)) = MM_1 = \sqrt{(a-a)^2 + (b-b)^2 + (c-0)^2} = |c|$.

Tương tự, $d(M,(Oyz)) = |a|$, $d(M,(Ozx)) = |b|$.

$$d(M,Ox) = MM_x = \sqrt{(a-a)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Tương tự, $d(M,Oy) = \sqrt{a^2 + c^2}$; $d(M,Oz) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

c) Nếu M_1' đối xứng với M qua mp(Oxy) thì M_1 là trung điểm của MM_1', bởi vậy $\overrightarrow{OM_1'} + \overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OM_1} \Rightarrow \overrightarrow{OM_1'} = 2\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM}$, suy ra $M_1' = (a\,;b\,;-c)$.

Tương tự, nếu M_2' đối xứng với M qua mp(Oyz) thì $M_2' = (-a\,;b\,;c)$; nếu M_3' đối xứng với M qua mp(Oxz) thì $M_3' = (a\,;-b\,;c)$.

6. Với điểm $M(x\,;y\,;z)$ ta có

$$\overrightarrow{MA} = (x_1 - x\,;y_1 - y\,;z_1 - z),\ \overrightarrow{MB} = (x_2 - x\,;y_2 - y\,;z_2 - z).$$

Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k\ (k \neq 1)$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, hay là :

$$\begin{cases} x_1 - x = k(x_2 - x) \\ y_1 - y = k(y_2 - y) \\ z_1 - z = k(z_2 - z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 - kx_2}{1-k} \\ y = \dfrac{y_1 - ky_2}{1-k} \\ z = \dfrac{z_1 - kz_2}{1-k}. \end{cases}$$

Chú ý rằng khi M là trung điểm của AB thì $k = -1$ và ta có kết quả đã biết.

7. Ta có $\overrightarrow{BA} = (-6\,;1\,;-1)$; $\overrightarrow{BC} = (2\,;3\,;1)$. Vì toạ độ của hai vectơ đó không tỉ lệ nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Nếu $D = (x\,;y\,;z)$ thì $\overrightarrow{BD} = (x-3\,;y+3\,;z-1)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ hay

$$\begin{cases} x - 3 = -6 + 2 \\ y + 3 = 1 + 3 \\ z - 1 = -1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Vậy $D = (-1 ; 1 ; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (8 ; 2 ; 2)$, $\overrightarrow{BD} = (-4 ; 4 ; 0)$, do đó :

$$\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{-32 + 8}{\sqrt{72}.\sqrt{32}} = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

8. a) M thuộc Ox nên $M = (x ; 0 ; 0)$. Vì $MA = MB$ nên $MA^2 = MB^2$ hay

$$(1 - x)^2 + 2^2 + 3^2 = (-3 - x)^2 + (-3)^2 + 2^2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy $M = (-1 ; 0 ; 0)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (2 ; \sqrt{3} ; 1)$, $\overrightarrow{OC} = (\sin 5t ; \cos 3t ; \sin 3t)$.

Hai đường thẳng AB và OC vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow 2\sin 5t + \sqrt{3}\cos 3t + \sin 3t = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 5t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\sin 3t = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 5t = -\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Vậy ta có đáp số : $t = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}$ hoặc $t = \frac{2\pi}{3} + l\pi$ với $l \in \mathbb{Z}$.

9. a) *Cách 1.* Ta thấy rằng hai vectơ $\vec{v}, \vec{w}$ không cùng phương, vậy ba vetơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng nếu có hai số m và n sao cho $\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$ hay :

$$\begin{cases} 4 = 2m + n \\ 3 = -m + 2n \\ 4 = 2m + n. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm $m = 1$, $n = 2$. Vậy ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng.

Cách 2. Ta có $\left[\vec{u},\vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (10;0;-10).$

Vậy $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w} = 10 + 0 - 10 = 0$, do đó $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ đồng phẳng.

b) $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ không đồng phẳng.

c) $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ đồng phẳng.

10. a) Ta có $\overrightarrow{BA} = (1;0;-1), \overrightarrow{BC} = (2;1;0)$, toạ độ hai vectơ đó không tỉ lệ nên chúng không cùng phương. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) $AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, BC = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5},$

$AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$

Vậy chu vi tam giác ABC bằng $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Dễ thấy tam giác ABC vuông tại A (vì $BC^2 = AB^2 + AC^2$) nên có diện tích

$$S = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Cũng có thể tính diện tích ΔABC theo công thức $S = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|$ và đi đến kết quả trên.

c) Từ công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.h_A$, ta suy ra $h_A = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{\sqrt{30}}{5}$.

d) Vì tam giác ABC vuông tại A nên

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \; ; \; \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

Cũng có thể tính cos$B$ theo công thức :

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}}{BC.BA} = \frac{2.1 + 0 + 0}{\sqrt{5}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

11. a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3\ ;\ 1\ ;\ -2)$.

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (1\ ;\ 1\ ;\ 1).$$

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -3 + 1 - 2 = -4 \neq 0$, suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng, do đó A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b) Ta có $\overrightarrow{CD} = (-2\ ;\ 1\ ;\ -3)$, $\overrightarrow{BD} = (-2\ ;\ 0\ ;\ -2)$, $\overrightarrow{BC} = (0\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi các cặp đường thẳng : AB và CD, AC và BD, AD và BC thì ta có

$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)\right| = \frac{|2 + 1 + 0|}{\sqrt{2}.\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}\ ;$$

$$\cos\beta = \left|\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)\right| = \frac{|2 + 0 - 2|}{\sqrt{2}.\sqrt{8}} = 0 \Rightarrow AC \perp BD\ ;$$

$$\cos\gamma = \left|\cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right)\right| = \frac{|0 - 1 - 2|}{\sqrt{2}.\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

c) Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{2}{3}$.

Độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A là : $h_A = \frac{3V}{S_{BCD}} = \frac{3V}{\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]\right\|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

12. Ta chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, tia Ox trùng với tia AC, tia Oz trùng với tia AS sao cho điểm B nằm trong góc xOy (h.66). Khi đó

$A = (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C = (b\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B = (b\ ;\ a\ ;\ 0)$. $S = (0\ ;\ 0\ ;\ h)$, $M = \left(\frac{b}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$,

$\overrightarrow{SB} = (b\ ;\ a\ ;-h)$.

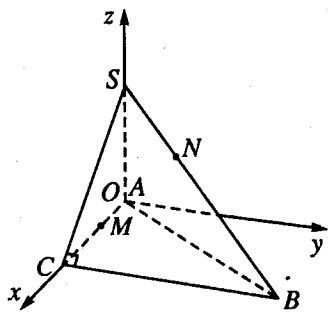
Ta đặt $N = (x\ ;\ y\ ;\ z)$ thì $\overrightarrow{SN} = (x\ ;\ y\ ;\ z - h)$.

Từ điều kiện $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$, ta suy ra

$$x = \frac{b}{3},\ y = \frac{a}{3} \text{ và } z - h = \frac{-h}{3}$$

hay $z = \frac{2h}{3}$.

Vậy $N = \left(\frac{b}{3}\ ;\ \frac{a}{3}\ ;\ \frac{2h}{3}\right)$.



Hình 66

a) $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2} ; \frac{a}{3} ; \frac{2h}{3}\right) = \left(-\frac{b}{6} ; \frac{a}{3} ; \frac{2h}{3}\right)$,

$MN = \sqrt{\frac{b^2}{36} + \frac{a^2}{9} + \frac{4h^2}{9}} = \frac{1}{6}\sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$.

b) MN vuông góc với SB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SB} = 0$ hay

$$\frac{-b^2}{6} + \frac{a^2}{3} + \frac{-2h^2}{3} = 0, \text{ hay } 4h^2 = 2a^2 - b^2.$$

13. a) Mặt cầu có tâm $I(4 ; -1 ; 0)$ và có bán kính $R = 4$.

b) Mặt cầu có tâm $I\left(-1 ; \frac{1}{2} ; -\frac{5}{2}\right)$ và có bán kính $R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

c) Mặt cầu có tâm $I\left(\frac{1}{3} ; -1 ; 0\right)$ và có bán kính $R = 1$.

14. a) Tâm I của mặt cầu nằm trên mp(Oyz) nên $I = (0 ; b ; c)$. Ta tìm điều kiện của b và c để $IA = IB = IC$. Ta có :

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (8-b)^2 + c^2 = 4^2 + (6-b)^2 + (2-c)^2 \\ (8-b)^2 + c^2 = (12-b)^2 + (4-c)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = 7 \text{ và } c = 5.$$

Vậy $I = (0 ; 7 ; 5)$. Khi đó $R = IA = \sqrt{0+1+25} = \sqrt{26}$. Mặt cầu có phương trình :

$$x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26.$$

b) Vì tâm I của mặt cầu nằm trên tia Ox và mặt cầu tiếp xúc với mp(Oyz) nên điểm tiếp xúc phải là O, do đó bán kính mặt cầu là $R = IO = 2$ và $I = (2 ; 0 ; 0)$. Mặt cầu có phương trình :

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

c) Vì mặt cầu có tâm $I(1 ; 2 ; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oyz) nên bán kính R của mặt cầu bằng khoảng cách từ I tới mp(Oyz), vậy $R = 1$. Mặt cầu có phương trình :

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1.$$

§2 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Hiểu được rằng trong không gian toạ độ, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó ba số A, B, C không đồng thời bằng 0 (hoặc tương đương với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$). Ngược lại mỗi phương trình như thế đều là phương trình của một mặt phẳng nào đó.
2. Khi cho phương trình của mặt phẳng, học sinh phải xác định được vectơ pháp tuyến của nó, xác định được toạ độ của một số điểm của nó. Học sinh nhận ra các trường hợp đặc biệt về vị trí của mặt phẳng (so với hệ trục toạ độ) căn cứ trên phương trình của nó.
3. Biết cách viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và có vectơ pháp tuyến cho trước, đồng thời biết cách đưa về trường hợp cơ bản đó để viết phương trình mặt phẳng trong những trường hợp khác.
4. Có thể nhận biết nhanh chóng vị trí tương đối của hai mặt phẳng căn cứ vào phương trình của chúng.
5. Nhớ và vận dụng được công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng, và áp dụng vào các bài toán khác.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. SGK không đưa ra khái niệm cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng và do đó cũng không giới thiệu phương trình tham số của mặt phẳng. Như vậy, học sinh chỉ biết một loại phương trình mặt phẳng mà trước đây ta gọi là phương trình tổng quát (nay chỉ nói gọn là phương trình mặt phẳng).
2. Công thức tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng được đưa ra nhưng không chứng minh vì nó hoàn toàn tương tự như trong hình học phẳng. Chỉ cần làm cho học sinh nhớ được công thức đó và vận dụng nó trong các bài toán tìm khoảng cách khác : khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song,...

Cũng xin lưu ý rằng SGK không nêu điều kiện để hai điểm nằm cùng phía hay khác phía đối với một mặt phẳng.

3. SGK không có một mục riêng nói về góc (góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng). Học sinh đã biết cách tính góc giữa hai vectơ, và từ đó tính được góc giữa hai đường thẳng. Ngoài ra, ở lớp 11, khái niệm góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng được định nghĩa dựa vào góc giữa hai đường thẳng.

III – TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm I của AB và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}$.

Ta có $I = (-2\,;\,-1\,;\,2)$ và $\overrightarrow{AB} = (-6\,;\,2\,;\,-2)$. Vậy (P) có phương trình :

$$-6(x+2) + 2(y+1) - 2(z-2) = 0 \quad \text{hay} \quad 3x - y + z + 3 = 0.$$

2

Giả sử $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ là một nghiệm của phương trình :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ (2) \ (\text{với } A^2 + B^2 + C^2 > 0),$$

tức là $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ hay $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A\,;\,B\,;\,C)$ thì (P) có phương trình :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

hay $Ax + By + Cz + D = 0$, đây chính là phương trình (2).

3

a) Mặt phẳng (α) đi qua gốc toạ độ $O(0\,;\,0\,;\,0)$ khi và chỉ khi

$$A.0 + B.0 + C.0 + D = 0 \text{ hay } D = 0.$$

b) Mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox khi và chỉ khi $\vec{n}.\vec{i} = 0$ (trong đó $\vec{n} = (A\,;\,B\,;\,C)$ là vectơ pháp tuyến của (α)), nghĩa là

$$A.1 + B.0 + C.0 = 0 \text{ hay } A = 0.$$

Tương tự, mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy khi và chỉ khi $B = 0$,

mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz khi và chỉ khi $C = 0$.

c) Mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với mp(Oxy) khi và chỉ khi $\vec{n}$ và $\vec{k}$ cùng phương, tức là $A = B = 0$.

Tương tự, mp(α) song song hoặc trùng với mp(Oyz) khi và chỉ $B = C = 0$,

mp(α) song song hoặc trùng với mp(Oxz) khi và chỉ $A = C = 0$.

?1 Nếu hai mặt phẳng (α) và (α') song song hoặc trùng nhau thì hai vectơ $\vec{n}(A\,;\,B\,;\,C)$ và $\vec{n'}(A'\,;\,B'\,;\,C')$ cùng phương. Bởi vậy, nếu hai vectơ $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ không cùng phương, tức là $A : B : C \neq A' : B' : C'$, thì (α) và (α') cắt nhau.

4

a) Nếu $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ thì hệ gồm hai phương trình của (α) và (α') vô nghiệm, suy ra hai mặt phẳng (α) và (α') song song.

b) Nếu $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ thì có số $t \neq 0$ sao cho $A = tA'$, $B = tB'$, $C = tC'$, $D = tD'$. Khi đó :

Điểm $M_0(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ thuộc (α) khi và chỉ khi

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$
$$\Leftrightarrow t(A'x_0 + B'y_0 + C'z_0 + D') = 0$$
$$\Leftrightarrow A'x_0 + B'y_0 + C'z_0 + D' = 0$$
$$\Leftrightarrow M_0 \in (\alpha').$$

Vậy trường hợp này xảy ra khi và chỉ khi (α) và (α') trùng nhau.

?2 Hai mặt phẳng (α) và (α') vuông góc với nhau khi hai vectơ $\vec{n}(A\,;\,B\,;\,C)$ và $\vec{n'}(A'\,;\,B'\,;\,C')$ vuông góc với nhau, tức là $AA' + BB' + CC' = 0$.

5

a) (α) và (β) song song khi $\frac{2}{1} = \frac{-m}{-2} = \frac{10}{3m+1} \neq \frac{m+1}{-10}$. Dễ thấy rằng không có số m như thế.

b) Cũng không có m để (α) và (β) trùng nhau.

c) Từ a) và b) suy ra với mọi m, hai mặt phẳng (α) và (β) luôn luôn cắt nhau.

d) (α) và (β) vuông góc với nhau khi hai vectơ pháp tuyến của chúng vuông góc, tức là :

$$2 + 2m + 10(3m + 1) = 0 \text{ hay } m = -\frac{3}{8}.$$

6
Hai mặt phẳng đó song song với nhau. Bởi vậy, khoảng cách giữa chúng bằng khoảng cách từ một điểm M nào đó của mặt phẳng thứ nhất đến mặt phẳng thứ hai. Ta có thể lấy $M = (0 ; 0 ; 3)$, và khoảng cách cần tìm là :

$$d = \frac{|4.3 + 4|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{16}{\sqrt{56}} = \frac{4\sqrt{14}}{7}.$$

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

15. a) *Cách 1.* Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1 ; -2 ; 4), \overrightarrow{MP} = (-2 ; 1 ; 3)$, suy ra

$$\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (-10 ; -5 ; -5).$$

Mặt phẳng (MNP) đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ cùng phương với vectơ $\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right]$, bởi vậy ta có thể lấy $\vec{n} = (2 ; 1 ; 1)$. Vậy mp(MNP) có phương trình :

$$2(x - 2) + y + (z + 1) = 0 \quad \text{hay } 2x + y + z - 3 = 0.$$

Cách 2. Phương trình mp(MNP) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$. Toạ độ của các điểm M, N, P là nghiệm của phương trình đó nên :

$$\begin{cases} 2A - C + D = 0 & (1) \\ A - 2B + 3C + D = 0 & (2) \\ B + 2C + D = 0. & (3) \end{cases}$$

Khử D từ các phương trình trên (bằng cách lấy (1) trừ cho (2) và lấy (2) trừ cho (3)), ta có

$$\begin{cases} A + 2B - 4C = 0 \\ A - 3B + C = 0. \end{cases}$$

Khử A từ hai phương trình trên, ta được $5B - 5C = 0$ hay $B = C$ và do đó $A = 2C$, $D = -3C$. Ta được phương trình : $2Cx + Cy + Cz - 3C = 0$. Hiển nhiên $C \neq 0$ (vì nếu $C = 0$ thì $A = B = C = 0$) nên chia hai vế của phương trình cho C, ta được :

$$2x + y + z - 3 = 0.$$

b) *Cách 1*. Giả sử mặt phẳng (P) đi qua A, B và song song với Oz có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ thì $\vec{n}$ phải vuông góc với $\overrightarrow{AB}(4\ ;\ 1\ ;\ 2)$ và vuông góc với $\vec{k}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, vậy có thể lấy

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{k}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right) = (1\ ;\ -4\ ;\ 0).$$

Ngoài ra, (P) đi qua điểm A nên phương trình của (P) là

$$1.(x - 1) - 4(y - 1) + 0 = 0 \text{ hay } x - 4y + 3 = 0.$$

Cách 2. Mặt phẳng (P) song song với Oz nên có phương trình :

$$A'x + B'y + D' = 0 \text{ với } D' \neq 0.$$

Mặt phẳng đó đi qua A và B nên toạ độ của A và B thoả mãn phương trình đó :

$$\begin{cases} A' + B' + D' = 0 \\ 5A' + 2B' + D' = 0 \end{cases} \Rightarrow 4A' + B' = 0.$$

Ta có thể lấy $A' = 1$, $B' = -4$ và do đó $D' = 3$ và được phương trình của (P) là

$$x - 4y + 3 = 0.$$

c) Mặt phẳng (P) cần tìm phải song song với mặt phẳng $x - 5y + z = 0$ nên hai mặt phẳng có cùng vectơ pháp tuyến là $(1\ ;\ -5\ ;\ 1)$. Ngoài ra, mp(P) phải đi qua điểm $(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$ nên nó có phương trình là :

$$(x - 3) - 5(y - 2) + (z + 1) = 0 \text{ hay } x - 5y + z + 8 = 0.$$

d) Mặt phẳng (P) cần tìm phải vuông góc với mặt phẳng $x - y + z + 1 = 0$ nên vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P) phải vuông góc với $\vec{n'} = (1\ ;\ -1\ ;\ 1)$; mp(P) lại đi qua hai điểm A, B nên $\vec{n}$ vuông góc với $\overrightarrow{AB} = (-1\ ;\ -1\ ;\ 1)$, vậy có thể lấy $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n'}\right] = (0\ ;\ 2\ ;\ 2)$. Phương trình của (P) là

$$2(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \quad \text{hay} \quad y + z - 2 = 0.$$

18. Hai mặt phẳng đã cho có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\overrightarrow{n_1}(2;-m;3)$, $\overrightarrow{n_2} = (m+3;-2;5m+1)$. Suy ra

$$\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-5m^2 - m + 6; -7m + 7; m^2 + 3m - 4).$$

Hai vectơ đó cùng phương khi và chỉ khi $\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \vec{0}$, tức là :

$$\begin{cases} -5m^2 - m + 6 = 0 \\ -7m + 7 = 0 \\ m^2 + 3m - 4 = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $m = 1$, khi đó hai mặt phẳng có phương trình là $2x - y + 3z - 5 = 0$ và $4x - 2y + 6z - 10 = 0$ nên chúng trùng nhau. Vậy

a) Không có giá trị m nào để hai mặt phẳng đó song song ;

b) Khi $m = 1$, hai mặt phẳng đó trùng nhau ;

c) Khi $m \neq 1$, hai mặt phẳng đó cắt nhau.

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$ hay :

$$2(m+3) + 2m + 3(5m+1) = 0 \Leftrightarrow 19m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{19}.$$

19. a) Điểm $M(x;y;z)$ cách đều hai mặt phẳng đã cho khi và chỉ khi :

$$\frac{|2x - y + 4z + 5|}{\sqrt{4+1+16}} = \frac{|3x + 5y - z - 1|}{\sqrt{9+25+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}|2x - y + 4z + 5| = \sqrt{3}|3x + 5y - z - 1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}(2x - y + 4z + 5) = \pm\sqrt{3}(3x + 5y - z - 1).$$

Vậy tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng :

$$(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} + 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} + \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} + \sqrt{3} = 0,$$

$$(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})x - (\sqrt{5} - 5\sqrt{3})y + (4\sqrt{5} - \sqrt{3})z + 5\sqrt{5} - \sqrt{3} = 0.$$

b) Tập hợp các điểm M là hai mặt phẳng có phương trình :

$$-4x + 16y - 20z - 1 = 0 \ ; \ 32x - 2y - 8z - 13 = 0.$$

c) Tập hợp các điểm M là một mặt phẳng có phương trình :

$$x + 2y + z + 2 = 0.$$

20. Hai mặt phẳng đã cho song song với nhau. Lấy điểm $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$ nằm trên mặt phẳng thứ nhất, tức là $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ hay $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$, thì khoảng cách d giữa hai mặt phẳng bằng khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng thứ hai, tức là :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

21. $M \in Oz$ nên $M = (0;0;c)$.

a) Độ dài MA bằng khoảng cách từ M tới mặt phẳng đã cho nên

$$\sqrt{2^2 + 3^2 + (4 - c)^2} = \frac{|c - 17|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow 13 + (4 - c)^2 = \frac{(c - 17)^2}{14}.$$

Từ đó suy ra $c = 3$. Vậy $M = (0 ; 0 ; 3)$.

b) Điểm M cách đều hai mặt phẳng đã cho nên $\frac{|-c + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|c + 5|}{\sqrt{3}}$ hay $c = -2$.

Vậy $M = (0 ; 0 ; -2)$.

22. Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với các tia Ox, Oy, Oz lần lượt là các tia OA, OB, OC. Khi đó ta có $A = (a ; 0 ; 0)$, $B = (0 ; b ; 0)$, $C = (0 ; 0 ; c)$ với $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-a ; b ; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a ; 0 ; c)$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2 > 0$. Vậy góc A của tam giác ABC là góc nhọn.
Chứng minh tương tự, ta có các góc B và C của tam giác đó cũng nhọn.

b) Mặt phẳng (ABC) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, vậy nó có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$. Mặt phẳng (OBC) chính là mặt phẳng (Oyz) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}(1 ; 0 ; 0)$. Gọi α là góc giữa mp(ABC) và mp(OBC) thì :

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{|\vec{n}.\vec{i}|}{|\vec{n}|.|\vec{i}|}\right)^2 = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

$$= \frac{b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

Tương tự, ta có

$$\cos^2\beta = \frac{c^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$\cos^2\gamma = \frac{a^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

Từ đó suy ra

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

23. Mặt cầu đã cho có tâm là $I(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ và có bán kính

$$R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2} = 4.$$

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $4x + 3y - 12z + 1 = 0$ nên có phương trình :

$$4x + 3y - 12z + D = 0 \text{ với } D \neq 1.$$

Khoảng cách d từ I tới mp(P) là

$$d = \frac{|4 + 6 - 36 + D|}{\sqrt{16 + 9 + 144}} = \frac{|-26 + D|}{13}.$$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi $d = R$, hay :

$$\frac{|-26 + D|}{13} = 4 \Leftrightarrow |-26 + D| = 52 \Leftrightarrow -26 + D = \pm 52$$

$$\Leftrightarrow D = 78 \text{ hoặc } D = -26.$$

Vậy có hai mặt phẳng thoả mãn yêu cầu là

$$4x + 3y - 12z + 78 = 0$$

và

$$4x + 3y - 12z - 26 = 0.$$

§3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I – MỤC TIÊU

Làm cho học sinh :

1. Biết cách viết phương trình tham số của đường thẳng và phương trình chính tắc của đường thẳng (nếu có).
2. Biết cách xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng khi biết phương trình của chúng.
3. Biết cách viết phương trình đường thẳng thoả mãn các điều kiện cho trước, chẳng hạn : đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng cho trước, đường thẳng đi qua một điểm cho trước và cắt hai đường thẳng chéo nhau cho trước, đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau cho trước, hình chiếu của một đường thẳng trên một mặt phẳng cho trước.
4. Biết tính góc và khoảng cách giữa các đối tượng : điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

II – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Trong chương trình không có khái niệm phương trình tổng quát của đường thẳng, SGK chỉ giới thiệu phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có). Để có thể viết phương trình tham số của đường thẳng, cần biết toạ độ của một điểm nào đó trên đường thẳng và một vectơ chỉ phương của đường thẳng. Đó là bài toán cơ bản mà học sinh cần nắm vững.

   Tuy nhiên, đường thẳng cũng có thể xác định như là giao tuyến của hai mặt phẳng. Bởi vậy học sinh thường gặp bài toán sau đây :

   "Cho hai mặt phẳng cắt nhau (α) và (β) lần lượt có phương trình :

   $$Ax + By + Cz + D = 0,$$
   $$A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

   Hãy viết phương trình tham số của đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng đó."

   Thực chất của bài toán trên là việc chuyển từ phương trình tổng quát của đường thẳng sang phương trình tham số.

Vì không có khái niệm phương trình tổng quát của đường thẳng nên ta cần làm cho học sinh hiểu được bản chất của các cách giải bài toán trên như sau :

Cách 1. (α) và (β) có các vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}(A\,;B\,;C)$ và $\vec{n'}(A'\,;B'\,;C')$ nên Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ vuông góc với cả $\vec{n}$ và $\vec{n'}$. Vậy ta chọn $\vec{u}$ là vectơ cùng phương với $\left[\vec{n}, \vec{n'}\right]$.

Ngoài ra, để tìm toạ độ của một điểm nào đó trên Δ, ta chỉ cần lấy một nghiệm $(x_0\,;y_0\,;z_0)$ nào đó của hệ :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Vậy Δ chính là đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0\,;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$.

Cách 2. Vì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên Δ gồm những điểm có toạ độ thoả mãn hệ phương trình (*).

Vì hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau nên có ít nhất một trong ba định thức sau đây khác không

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}$$

Nếu định thức

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$$

thì bằng cách đặt $z = t$ và từ hệ (*), ta tìm được x và y theo t, tức là ta có hệ :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = t. \end{cases}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng Δ.

Cách 3. Tìm hai điểm M_1, M_2 thuộc Δ, tức là hai nghiệm phân biệt của hệ

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z = 0. \end{cases}$$

Khi đó Δ chính là đường thẳng đi qua M_1 và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

• Cần lưu ý học sinh là ta có thể chọn nhiều điểm khác nhau trên Δ làm điểm M_0 cho trước và nhiều vectơ chỉ phương (tỉ lệ với nhau) nên cùng một đường thẳng Δ có nhiều phương trình tham số khác nhau.

2. Chúng ta cần lưu ý cho học sinh các phương pháp xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng và các mặt phẳng.

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng rất dễ nhận biết bằng cách nhìn vào phương trình của chúng, như đã nói ở §2.

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng, ta có thể xét vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng. Nhưng nếu cần chỉ ra toạ độ giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng thì ta nên dùng cách giải hệ phương trình. Ví dụ, một đường thẳng Δ cho bởi phương trình tham số, tức là hệ ba phương trình bậc nhất biểu thị x, y, z theo t, còn mặt phẳng (α) cho bởi phương trình bậc nhất giữa ba ẩn x, y, z, thì bằng cách xét hệ bốn phương trình trên với bốn ẩn số x, y, z, t, ta có thể xác định được vị trí tương đối của Δ và (α) tuỳ theo hệ phương trình đó vô nghiệm, có nghiệm duy nhất hoặc có vô số nghiệm.

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng thì nên dùng phương pháp vectơ, tức là xét bộ ba vectơ gồm hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng và vectơ thứ ba có điểm đầu và điểm cuối lần lượt nằm trên hai đường thẳng đó.

3. Để tính khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, SGK không trình bày công thức tổng quát mà chỉ nêu ra như một ứng dụng của tích vectơ với hi vọng học sinh có thể vận dụng không khó khăn lắm.

III – TRẢ LỜI ? VÀ HƯỚNG DẪN HOẠT ĐỘNG

1

a) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (-2;1;2)$.

b) Với các giá trị $t = 0$, $t = 1$, $t = -2$, ta có các điểm tương ứng là

$$M_1(1;2;0),\ M_2(-1;3;2),\ M_3(5;0;-4).$$

c) Điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi có giá trị t thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x_0 = 1 - 2t \\ y_0 = 2 + t \\ z_0 = 2t. \end{cases}$$

Làm như vậy đối với các điểm A, B, C, ta có : điểm $A(3 ; 1 ; -2)$ thuộc d (ứng với $t = -1$), điểm $B(-3 ; 4 ; 2)$ không thuộc d, và điểm $C(0 ; 2,5 ; 1)$ thuộc d (ứng với $t = 0,5$).

2

a) Hai mặt phẳng (α) và (α') cắt nhau vì bộ ba số $(2 ; 2 ; 1)$ không tỉ lệ với bộ ba số $(2 ; -1 ; -1)$.

b) Đường thẳng d gồm các điểm $M(x; y; z)$ vừa thuộc mặt phẳng (α), vừa thuộc mặt phẳng (α') nên toạ độ của M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy điểm $M_0(-1 ; 3 ; 0)$ thuộc đường thẳng d.

$\overrightarrow{n_1} = (2 ; 2 ; 1)$ là vectơ pháp tuyến của (α)

$\overrightarrow{n_2} = (2 ; -1 ; -1)$ là vectơ pháp tuyến của (α').

Vậy $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-1 ; 4 ; -6)$ là một vectơ chỉ phương của d.

c) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(-1 ; 3 ; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1 ; 4 ; -6)$ nên có

phương trình tham số là : $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 4t \\ z = -6t, \end{cases}$

phương trình chính tắc là : $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{-6}$.

? Hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau khi hai vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$ vuông góc với nhau, tức là $\vec{u}.\vec{u'} = 0$.

3

Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(-2\,;-2\,;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(3\,;2\,;-1)$.

Vì $M = (4\,;-3\,;2)$ nên $\overrightarrow{M_0M} = (6\,;-1;2)$ và $\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}\right] = (-3;12;15)$.

Vậy khoảng cách cần tìm là

$$\frac{\sqrt{3^2 + 12^2 + 15^2}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = 3\sqrt{3}.$$

4

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(0\,;1\,;6)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1;2;3)$, đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(1\,;-2\,;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (1;1;-1)$.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (1\,;-3\,;-3)$, $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-5\,;4\,;-1)$, $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = -14$.

Vậy khoảng cách giữa d_1 và d_2 là :

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right\|} = \frac{14}{\sqrt{25 + 16 + 1}} = \frac{\sqrt{42}}{3}.$$

IV – TRẢ LỜI CÂU HỎI VÀ GIẢI BÀI TẬP

24. a) Trục Ox đi qua O và có vectơ chỉ phương $\vec{i}(1\,;0\,;0)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$

Tương tự, Oy có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0, \end{cases}$

Oz có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t. \end{cases}$

Các đường thẳng đó không có phương trình chính tắc.

b) Đường thẳng đi qua $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$, song song với trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i}$ nên có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = z_0 . \end{cases}$$

Tương tự, đường thẳng đi qua M_0, song song với Oy có phương trình là :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t \\ z = z_0, \end{cases}$$

đường thẳng đi qua M_0, song song với Oz có phương trình là :

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t. \end{cases}$$

Các đường thẳng trên không có phương trình chính tắc.

c) Phương trình tham số : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -1 + 5t. \end{cases}$

Phương trình chính tắc $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{5}$.

d) Phương trình tham số : $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t. \end{cases}$

Không có phương trình chính tắc.

e) Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $2x - 5y + 4 = 0$ nên $\vec{u} = (2 ; -5 ; 0)$. Vậy đường thẳng có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1. \end{cases}$$

Không có phương trình chính tắc.

g) Đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1\,;-1\,;5)$ và đi qua $P(2\,;3\,;-1)$ nên có

phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t, \end{cases}$

phương trình chính tắc là $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{5}$.

25. a) Đường thẳng cần tìm có các phương trình :

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{2}.$$

b) Đường thẳng cần tìm có các phương trình :

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{3} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

26. Đường thẳng d có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Mỗi điểm $M(x; y; z) \in d$ có hình chiếu trên mp(Oxy) là điểm $M'(x; y; 0) \in d'$, d' là hình chiếu của d trên mp(Oxy). Vậy d' có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0. \end{cases}$$

Tương tự, ta có phương trình hình chiếu của d trên mp(Oxz), mp(Oyz) lần lượt là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

27. a) Điểm $M_0(0\,;8\,;3)$ nằm trên d. Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}(1; 4; 2)$.

b) Vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P}(1;1;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (P) thì vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (α) vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\overrightarrow{n_P}$ nên ta có thể lấy $\vec{n} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{n_P}\right] = (2;1;-3)$. Ngoài ra, (α) đi qua d nên cũng đi qua điểm M_0. Vậy (α) có phương trình :

$$2(x-0) + (y-8) - 3(z-3) = 0 \quad \text{hay} \quad 2x + y - 3z + 1 = 0.$$

c) Vì d không vuông góc với (P) nên hình chiếu của d trên (P) là đường thẳng d'. Đường thẳng d' là giao tuyến của (α) và (P) nên d' có phương trình là :

$$\begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 15 - 5t \\ z = t. \end{cases}$$

28. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1\ ;\ 7\ ;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2\ ;\ 1\ ;\ 4)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(3;-1;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}(6\ ;-2\ ;\ 1)$.

Từ đó ta có :

$$\overrightarrow{MM'} = (2;-8;-5)\ ;\ \left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right] = (9;22;-10) \neq \vec{0}$$

và $$\left[\vec{u}, \overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{MM'} = -108 \neq 0.$$

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(0\ ;\ -3\ ;\ -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1\ ;-4\ ;-3)$.

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'} = (1\ ;-4\ ;-3)$.

Như vậy, d và d' có cùng vectơ chỉ phương, ngoài ra vì điểm $M(0\ ;-3\ ;-3)$ không nằm trên d' nên ta có $d'\ //\ d$.

29. Dễ thấy $A \notin d$, $A \notin d'$.

Cách 1. Đường thẳng d đi qua điểm $M(1\ ;\ 0\ ;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2;1;-1)$. Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(0\ ;\ -1\ ;\ 2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'}(1;-2;1)$.

Đường thẳng Δ cần tìm là giao tuyến của hai mặt phẳng : mp(A, d) và mp(A, d'). mp(A, d) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right] = (-3;\ 4;\ -2)$. Vì $\left[\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{u'}\right] = (2;\ 2;\ 2)$ nên mp(A, d') có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'} = (1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

Vậy đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\left[\vec{n}, \vec{n'}\right] = (6\,;\,1\,;\,-7)$. Do đó Δ có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 7t. \end{cases}$$

Ta chú ý rằng $\vec{u}.\vec{n'} = 2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$ nên d cắt mp(A, d'), do đó d cắt Δ. Tương tự, vì $\vec{u'}.\vec{n} = -3 - 8 - 2 = -13 \neq 0$ nên d' cắt mp(A, d), do đó d' cắt Δ. Vậy Δ là đường thẳng đi qua A, cắt cả d và d'.

Cách 2. mp(A, d) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(-3\,;\,4\,;\,-2)$ nên có phương trình là $3x - 4y + 2z - 9 = 0$. Toạ độ giao điểm B của đường thẳng d' và mp(A, d) thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \\ 3x - 4y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$$

Suy ra $B = \left(\frac{1}{13}; -\frac{15}{13}; \frac{27}{13}\right)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua hai điểm A và B ; vì $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{12}{13}; -\frac{2}{13}; \frac{14}{13}\right)$ nên có thể lấy vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (-6\,;\,-1\,;\,7)$. Vậy Δ có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 7t. \end{cases}$$

Ta có Δ đi qua A và cắt d' tại B, ngoài ra Δ và d cùng nằm trong mp(A, d) và có các vectơ chỉ phương không cùng phương nên Δ cũng cắt d. Vậy Δ là đường thẳng cần tìm.

Cách 3. Lấy điểm $M(1 + 2t\,;\,t\,;\,3 - t)$ nằm trên d và điểm $M'(t'\,;\,-1 - 2t'\,;\,2 + t')$ nằm trên d'. Ta tìm giá trị của t và t' sao cho điểm $A(1\,;\,-1\,;\,1)$ nằm trên đường thẳng MM', tức là $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM'}$ cùng phương.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (2t; 1+t; 2-t)$, $\overrightarrow{AM'} = (-1+t'; -2t'; 1+t')$. Do đó :

$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1+t & 2-t \\ -2t' & 1+t' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2-t & 2t \\ 1+t' & -1+t' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2t & 1+t \\ -1+t' & -2t' \end{vmatrix}\right)$$

$$= (1 + t + 5t' - tt'; -2 - t + 2t' - 3tt'; 1 + t - t' - 5tt').$$

Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AM'}$ cùng phương khi và chỉ khi $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right] = \vec{0}$ hay :

$$\begin{cases} 1 + t + 5t' - tt' = 0 \\ -2 - t + 2t' - 3tt' = 0 \\ 1 + t - t' - 5tt' = 0. \end{cases}$$

Khử số hạng tt' từ các phương trình trên, ta được hệ :

$$\begin{cases} 5 + 4t + 13t' = 0 \\ 4 + 4t + 26t' = 0, \end{cases}$$

suy ra $t = -\frac{3}{2}$; $t' = \frac{1}{13}$. Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(-3; -\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và M (do đó đi qua cả M') thì nó có vectơ chỉ phương là $2\overrightarrow{AM} = (-6; -1; 7)$. Từ đó ta viết được phương trình đường thẳng cần tìm AM.

30. *Cách 1.* Đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}(0; 4; -1)$. Ta viết các phương trình của d_2 và d_3 dưới dạng tham số :

$$d_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \qquad d_3 : \begin{cases} x = -4 + 5t' \\ y = -7 + 9t' \\ z = t'. \end{cases}$$

Trên đường thẳng d_2 lấy điểm $M_2(1 + t ; -2 + 4t ; 2 + 3t)$ và trên đường thẳng d_3 lấy điểm $M_3(-4 + 5t' ; -7 + 9t' ; t')$. Ta xác định các giá trị t và t' sao cho $\overrightarrow{M_2M_3}$ và $\vec{u_1}$ cùng phương.

Ta có $\overrightarrow{M_2M_3} = (-5 + 5t' - t ; -5 + 9t' - 4t ; -2 + t' - 3t)$.

Hai vectơ $\overrightarrow{M_2M_3}$ và $\vec{u_1}$ cùng phương khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} -5 + 5t' - t = 0 \\ \dfrac{-5 + 9t' - 4t}{4} = \dfrac{-2 + t' - 3t}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 1. \end{cases}$$

Với các giá trị tìm được của t và t', ta có $M_2 = (1 ; -2 ; 2)$ và $\overrightarrow{M_2M_3} = (0;4;-1)$.

Vậy đường thẳng Δ đi qua M_2 và M_3 có phương trình :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

Dễ thấy $M_2 \notin d_1$. Vậy Δ đúng là đường thẳng cần tìm.

Cách 2. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua d_2 và song song với d_1, phương trình mặt phẳng (β) đi qua d_3 và song song với d_1. Hai mặt phẳng đó cắt nhau theo giao tuyến Δ là đường thẳng cần tìm nếu Δ không trùng với d_1.

31. a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(8 ; 5 ; 8)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1; 2; -1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(3 ; 1 ; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(-7 ; 2 ; 3)$.

Ta có : $\overrightarrow{M_2M_1} = (5;4;7)$, $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = (8;4;16)$, do đó

$$\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1} = 168 \neq 0.$$

Vậy hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Có thể lấy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng cần tìm là $\vec{n} = \frac{1}{4}\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = (2;1;4)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng đi qua O với vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ là $2x + y + 4z = 0$. Dễ thấy M_1, M_2 không thuộc mặt phẳng này, vậy nó chính là mặt phẳng cần tìm.

c) Gọi khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là d, ta có :

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|} = 2\sqrt{21}.$$

d) *Cách 1.* Ta có $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = (8;4;16)$. Đường vuông góc chung Δ của d_1 và d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ vuông góc với cả $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ nên có thể lấy $\vec{u} = (2 ; 1 ; 4)$.

Vì Δ cắt d_1 nên ta có mp(Δ, d_1), đó là mặt phẳng đi qua M_1 và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_1}\right] = (-9; 6; 3)$. Vậy mp$(\Delta, d_1)$ có phương trình :

$$-9(x - 8) + 6(y - 5) + 3(z - 8) = 0 \text{ hay } -3x + 2y + z + 6 = 0.$$

Vì Δ cắt d_2 nên ta có mp(Δ, d_2), đó là mặt phẳng đi qua M_2 và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-5; -34; 11)$. Vậy mp$(\Delta, d_2)$ có phương trình :

$$-5(x - 3) - 34(y - 1) + 11(z - 1) = 0 \text{ hay } 5x + 34y - 11z - 38 = 0.$$

Đường vuông góc chung Δ là giao tuyến của mp(Δ, d_1) và mp(Δ, d_2) nên có phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -3 + 4t. \end{cases}$$

Cách 2. Giả sử PQ là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 với $P \in d_1$; $Q \in d_2$. Khi đó ta có các giá trị t và t' sao cho

$$P = (8 + t; 5 + 2t; 8 - t), \quad Q = (3 - 7t'; 1 + 2t'; 1 + 3t').$$

Như vậy ta có :

$$\overrightarrow{PQ} = (-5 - 7t' - t; -4 + 2t' - 2t; -7 + 3t' + t).$$

Vectơ $\overrightarrow{PQ}$ đồng thời vuông góc với hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 - 7t' - t + 2(-4 + 2t' - 2t) - (-7 + 3t' + t) = 0 \\ -7(-5 - 7t' - t) + 2(-4 + 2t' - 2t) + 3(-7 + 3t' + t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6t' - 6t = 6 \\ 62t' + 6t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t = -1. \end{cases}$$

Vậy $P = (7; 3; 9)$, $Q = (3; 1; 1)$ và do đó, đường vuông góc chung của d_1 và d_2 có phương trình :

$$\frac{x - 3}{7 - 3} = \frac{y - 1}{3 - 1} = \frac{z - 1}{9 - 1} \quad \text{hay} \quad \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{4}.$$

32. a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2\,;3\,;5)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2\,;1\,;1)$. Gọi φ là góc giữa d và (α) thì $0^o \le \varphi \le 90^o$ và

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u}\,.\,\vec{n}|}{|\vec{u}|\,.\,|\vec{n}|} = \frac{|4+3+5|}{\sqrt{4+9+25}.\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{57}}.$$

b) Đưa phương trình của d về dạng tham số với tham số t rồi kết hợp với phương trình của (α), ta được $2(2+2t)+(-1+3t)+(1+5t)-8=0$, suy ra $t=\frac{1}{3}$ và được giao điểm là $I\left(\frac{8}{3};0;\frac{8}{3}\right)$.

c) *Cách 1.* Gọi (β) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (α) thì hình chiếu d' của d trên (α) là giao tuyến của (β) và (α). Bởi vậy, ta cần tìm phương trình của (β). Vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\beta}$ của (β) vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\vec{n}$ nên ta chọn $\overrightarrow{n_\beta} = \left[\vec{u},\vec{n}\right] = (-2\,;8\,;-4)$. Ngoài ra, (β) đi qua d nên cũng đi qua điểm $A(2\,;-1\,;1)$. Do đó (β) có phương trình :

$$-2(x-2)+8(y+1)-4(z-1)=0 \text{ hay } -x+4y-2z+8=0.$$

Suy ra phương trình tham số của hình chiếu d' là :

$$\begin{cases} x = \frac{8}{3} - 2t \\ y = t \\ z = \frac{8}{3} + 3t. \end{cases}$$

Cách 2. Ta lấy một điểm A nằm trên d khác với I, chẳng hạn $A=(2;-1\,;1)$ và gọi $A'=(a\,;b\,;c)$ là hình chiếu của A trên (α). Toạ độ của A' xác định bởi hai điều kiện : A' nằm trên (α) và vectơ $\overrightarrow{AA'}=(a-2\,;b+1\,;c-1)$ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2\,;1\,;1)$ của (α).

Vậy ta có :

$$\begin{cases} 2a+b+c-8=0 \\ \frac{a-2}{2} = \frac{b+1}{1} = \frac{c-1}{1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c - 8 = 0 \\ a = 2b + 4 \\ c = b + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2b + 4) + b + b + 2 - 8 = 0 \\ a = 2b + 4 \\ c = b + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ a = \frac{10}{3} \\ c = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Vậy $A' = \left(\frac{10}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (α) chính là đường thẳng d' đi qua hai điểm I và A'.

Vì $$\overrightarrow{IA'} = \left(\frac{10}{3} - \frac{8}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3} - \frac{8}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right)$$

nên có thể lấy vectơ chỉ phương của d' là $\vec{u'} = (2 ; -1 ; -3)$.

Vậy đường thẳng d' có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = \frac{8}{3} + 2t \\ y = -t \\ z = \frac{8}{3} - 3t. \end{cases}$$

33. a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ với tham số t và thay các giá trị x, y, z cho bởi phương trình đó vào phương trình của mp(P), ta được :

$$2(1 + t) + 3 + 2t - 5 = 0, \text{ suy ra } t = 0.$$

Vậy giao điểm của Δ và mp(P) là $A = (1 ; 2 ; 3)$.

b) *Cách 1*. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ thì (Q) có vectơ pháp tuyến là vectơ chỉ phương của Δ nên có phương trình :

$$x - 1 + 2(y - 2) + 2(z - 3) = 0 \quad \text{hay} \quad x + 2y + 2z - 11 = 0.$$

Giao tuyến d của (P) và (Q) là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và $d \perp \Delta$ (vì d nằm trong (Q) mà $\Delta \perp (Q)$). Suy ra phương trình tham số của d là :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \\ y = t \\ z = \frac{17}{3} - \frac{4}{3}t. \end{cases}$$

Cách 2. Gọi d là đường thẳng đi qua A, nằm trong (P) và vuông góc với Δ. Khi đó, vectơ chỉ phương $\vec{u'}$ của d phải vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; 2; 2)$ của Δ, đồng thời vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2; 0; 1)$ của (P), nên ta chọn : $\vec{u'} = [\vec{u}, \vec{n}] = (2 ; 3 ; -4)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình chính tắc :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}.$$

34. a) *Cách 1.* Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(-2 ; 1 ; -1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1 ; 2 ; -2)$. Ta có $\overrightarrow{M_0M} = (4 ; 2 ; 2)$, $\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}\right] = (8 ; -10 ; -6)$.

Vậy khoảng cách cần tìm là

$$d = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{8^2 + 10^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Cách 2. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $M(2 ; 3 ; 1)$ và vuông góc với Δ thì (α) có vectơ pháp tuyến $(1 ; 2 ; -2)$. Vậy (α) có phương trình :

$$x - 2 + 2(y - 3) - 2(z - 1) = 0 \quad \text{hay} \quad x + 2y - 2z - 6 = 0.$$

Từ đó, ta có thể tìm được toạ độ giao điểm H của (α) và Δ là :

$$H\left(-\frac{14}{9}; \frac{17}{9}; -\frac{17}{9}\right).$$

Do đó $$d(M, \Delta) = MH = \sqrt{\left(\frac{32}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

b) Ta có $$\overrightarrow{M_0N} = \left(\frac{5}{2} ; 3 ; -\frac{1}{4}\right),$$

$$\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0N}\right] = \left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; -17\right).$$

Vậy khoảng cách cần tìm là

$$d = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{M_0N}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 17^2}}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2870}}{14}.$$

35. a) *Cách 1.* Đường thẳng d đi qua điểm $M_1(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(1\ ;\ -1\ ;\ 0)$. Đường thẳng d' đi qua điểm $M_2(2\ ;\ -2\ ;\ 3)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Vì $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương nhưng $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2} = (1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ nên hai đường thẳng đó song song.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng đó bằng khoảng cách từ M_1 tới d' và bằng

$$\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = 2.$$

Cách 2. Dễ nhận thấy rằng d và d' song song với nhau. Bởi vậy, khoảng cách giữa hai đường thẳng đó bằng khoảng cách từ điểm $M(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$ (nằm trên d) tới đường thẳng d'.

Giả sử H là hình chiếu vuông góc của M trên d' thì H có toạ độ :

$H = (2 - 3t\ ;\ -2 + 3t\ ;\ 3)$ và $\overrightarrow{MH}$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ của d'.

Vì $\overrightarrow{MH} = (1 - 3t\ ;\ -1 + 3t\ ;\ 2)$ nên $-(1 - 3t) + (-1 + 3t) = 0$ hay $t = \frac{1}{3}$.

Suy ra $\overrightarrow{MH} = (0\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' là $MH = 2$.

b) Lấy điểm $M \in d, M' \in d'$ thì

$$M = (-t\ ;\ 4 + t\ ;\ -1 - 2t),$$

$$M' = (-t'\ ;\ 2 + 3t'\ ;\ -4 + 3t').$$

Suy ra

$$\overrightarrow{MM'} = (-t' + t\ ;\ -2 + 3t' - t\ ;\ -3 + 3t' + 2t).$$

MM' là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d, d' khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{u'} = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' - t - 2 + 3t' - t + 6 - 6t' - 4t = 0 \\ t' - t - 6 + 9t' - 3t - 9 + 9t' + 6t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' + 3t = 2 \\ 19t' + 2t = 15. \end{cases}$$

Từ đó ta có $t' = \frac{41}{55}, t = \frac{23}{55}$

và $\overrightarrow{MM'} = \left(\frac{-18}{55}; \frac{-10}{55}; \frac{4}{55}\right).$

Khoảng cách giữa d và d' là

$$MM' = \sqrt{\left(\frac{-18}{55}\right)^2 + \left(\frac{-10}{55}\right)^2 + \left(\frac{4}{55}\right)^2} = \frac{2\sqrt{110}}{55}.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I – NHỮNG ĐIỀU CẦN LƯU Ý

1. Cần hướng dẫn học sinh chuẩn bị ôn tập ở nhà. Cụ thể : hệ thống lại các kiến thức cần nhớ ở cuối chương, tự mình trả lời các câu hỏi tự kiểm tra và làm các bài ôn tập.
2. Tuỳ theo tình hình cụ thể của mỗi lớp, thầy giáo chọn một số bài tập để chữa tại lớp, các bài khác cho học sinh nêu phương pháp giải.
3. Cho học sinh làm bài kiểm tra 45 phút.

II – HƯỚNG DẪN GIẢI CÁC BÀI TẬP

1. a) $\overrightarrow{AB} = (3\,;-6\,;4)$, $\overrightarrow{AC} = (4\,;-6\,;2)$, $\overrightarrow{AD} = (4\,;-5\,;1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix}-6 & 4\\ -6 & 2\end{vmatrix}\,;\,\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}\,;\,\begin{vmatrix}3 & -6\\ 4 & -6\end{vmatrix}\right) = (12\,;10\,;6)$;

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 12.4 - 5.10 + 6.1 = 4 \neq 0.$

Vậy A, B, C, D không đồng phẳng, suy ra $ABCD$ là hình tứ diện.

b) $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

c) $\overrightarrow{BC} = (1\,;0\,;-2)$, $\overrightarrow{BD} = (1\,;1\,;-3)$.

Ta gọi $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right] = \left(\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{vmatrix}\,;\,\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}\,;\,\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right) = (2\,;1\,;1)$.

Mặt phẳng (BCD) đi qua $B(4\ ;\ 0\ ;\ 6)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ nên có phương trình :

$$2(x-4) + 1(y-0) + 1(z-6) = 0 \quad \text{hay} \quad 2x + y + z - 14 = 0.$$

d) Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mp(BCD) có bán kính R bằng khoảng cách từ A tới mp(BCD) nên

$$R = \frac{|2.1 + 1.6 + 1.2 - 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy mặt cầu có phương trình :

$$(x-1)^2+(y-6)^2+(z-2)^2=\frac{8}{3}.$$

Gọi H là tiếp điểm thì AH là đường thẳng đi qua A, vuông góc với mp(BCD) nên có vectơ chỉ phương là $\vec{n}(2;1;1)$. Vậy AH có phương trình :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=6+t \\ z=2+t. \end{cases}$$

Từ đó, kết hợp với phương trình của mp(BCD), ta suy ra toạ độ của điểm H ứng với $t=\frac{2}{3}$, tức là

$$H=\left(\frac{7}{3};\frac{20}{3};\frac{8}{3}\right).$$

2. a) Điểm $A'(x_0;y_0;z_0)$ đối xứng với điểm A qua mp(P) khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'}$ là vectơ pháp tuyến của (P) và trung điểm I của AA' nằm trên (P).

Ta có $\overrightarrow{AA'}=(x_0-1;y_0+1;z_0+2)$

và $I=\left(\frac{x_0+1}{2};\frac{y_0-1}{2};\frac{z_0-2}{2}\right).$

Vậy các điều kiện đó là :

$$\frac{x_0-1}{1}=\frac{y_0+1}{-2}=\frac{z_0+2}{3}$$

và $$\frac{x_0+1}{2}-2\left(\frac{y_0-1}{2}\right)+3\left(\frac{z_0-2}{2}\right)-5=0.$$

Từ đó ta tìm được toạ độ của điểm A' là $A'=\left(\frac{15}{7};-\frac{23}{7};\frac{10}{7}\right).$

b) Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;3)$ và mp(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1;-2;3)$.

Gọi φ là góc giữa đường thẳng AB và mp(P), ta có

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|},\ \text{với } 0^o\le\varphi\le 90^o.$$

Vậy $\sin\varphi = \dfrac{|2-4+9|}{\sqrt{17}.\sqrt{14}} = \dfrac{7}{\sqrt{238}}$ với $0^o \le \varphi \le 90^o$.

c) Nếu $\overrightarrow{n_Q}$ là vectơ pháp tuyến của mp(Q) thì $\overrightarrow{n_Q}$ phải vuông góc với cả hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{n_P}$.

Vì $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}\right] = (12\,;\,-3\,;\,-6)$ nên có thể lấy $\overrightarrow{n_Q} = (4\,;\,-1\,;\,-2)$.

Vậy phương trình của mp(Q) là :

$$4(x-1) - (y+1) - 2(z+2) = 0$$

hay $$4x - y - 2z - 9 = 0\,.$$

d) Toạ độ của I thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \\ x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm được

$$I = \left(\frac{23}{7}\,;\frac{9}{7}\,;\frac{10}{7}\right).$$

Đường thẳng Δ chính là giao tuyến của mp(P) và mp(R), trong đó (R) đi qua I và vuông góc với AB.

Vì $\overrightarrow{AB} = (2\,;2\,;3)$ nên phương trình của mp(R) là :

$$2\left(x - \frac{23}{7}\right) + 2\left(y - \frac{9}{7}\right) + 3\left(z - \frac{10}{7}\right) = 0$$

hay $$14x + 14y + 21z - 94 = 0.$$

Suy ra Δ có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = \dfrac{23}{7} + 4t \\ y = \dfrac{9}{7} - t \\ z = \dfrac{10}{7} - 2t. \end{cases}$$

3. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0\left(\frac{2}{3}\ ;-\frac{11}{3}\ ;\ 0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$. Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mp(P) thì $d' = (P) \cap (Q)$ là hình chiếu vuông góc của d trên (P).

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}(1\ ;-3\ ;\ 1)$. Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}$ vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\overrightarrow{n_P}$. Vì $\left[\vec{u}, \overrightarrow{n_P}\right] = (4\,;0\,;-4)$ nên ta lấy $\overrightarrow{n_Q} = (1\,;0\,;-1)$. Ngoài ra, (Q) chứa đường thẳng d nên cũng đi qua điểm M_0, do đó (Q) có phương trình $x - \frac{2}{3} - z = 0$ hay $3x - 3z - 2 = 0$.

Suy ra phương trình của đường thẳng d' là

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3}t \\ z = t. \end{cases}$$

b) Gọi (R) là mặt phẳng chứa d và song song với Oz (hoặc chứa Oz), khi đó d_1 chính là giao tuyến của mp(R) và mp(P). Mặt phẳng (R) đi qua $M_0\left(\frac{2}{3}\ ;-\frac{11}{3}\ ;\ 0\right)$ và có vectơ pháp tuyến vuông góc với cả $\vec{u}$ và $\vec{k}$ ($\vec{k}$ là vectơ chỉ phương của trục Oz). Do đó $\overrightarrow{n_R} = \left[\vec{u}, \vec{k}\right] = (1\ ;-1\ ;\ 0)$.

Mặt phẳng (R) có phương trình là $3x - 3y - 13 = 0$.

Suy ra d_1 có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = \frac{13}{3} + t \\ y = t \\ z = -\frac{10}{3} + 2t. \end{cases}$$

c) Gọi (P') là mặt phẳng đi qua gốc toạ độ O và song song với mp(P) thì (P') có phương trình : $x - 3y + z = 0$. Giao điểm I của đường thẳng d và mp(P') có toạ độ thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = -\frac{11}{3} + t \\ z = t \\ x - 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow I = \left(\frac{37}{3}\,;\,8\,;\,\frac{35}{3}\right).$$

Đường thẳng đi qua O và I là đường thẳng cần tìm, nó có phương trình :

$$\frac{x}{\frac{37}{3}} = \frac{y}{8} = \frac{z}{\frac{35}{3}} \quad \text{hay} \quad \frac{x}{37} = \frac{y}{24} = \frac{z}{35}.$$

4. a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(-2\,;\,2\,;\,0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}(-1\,;\,1\,;\,2)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và d_1 có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{u_1}\right] = (-1\,;\,9\,;\,-5)$.

Vậy mp(P) có phương trình :

$$-(x + 2) + 9(y - 2) - 5z = 0 \text{ hay } x - 9y + 5z + 20 = 0.$$

b) Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(-5\,;\,2\,;\,0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(3;-1;1)$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và d_2 có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-2;4;10)$.

Vậy mp(Q) có phương trình :

$$-2(x + 5) + 4(y - 2) + 10z = 0 \quad \text{hay} \quad x - 2y - 5z + 9 = 0.$$

c) Đường thẳng d đi qua A, cắt cả d_1 và d_2 nên d nằm trên cả hai mặt phẳng (P) và (Q), tức là d gồm những điểm có toạ độ thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 9y + 5z + 20 = 0 \\ x - 2y - 5z + 9 = 0. \end{cases}$$

Đặt $x = t$, ta được hệ tương đương :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{29}{11} + \dfrac{2}{11}t \\ z = \dfrac{41}{55} + \dfrac{7}{55}t. \end{cases}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng d. Hai đường thẳng d và d_1 cùng nằm trong mặt phẳng (P) và có các vectơ chỉ phương không cùng phương nên cắt nhau. Hai đường thẳng d và d_2 cùng nằm trong mặt phẳng (Q) và có các vectơ chỉ phương không cùng phương nên cắt nhau.

d) Gọi h là khoảng cách từ A đến d_2, ta có :

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{\sqrt{4 + 16 + 100}}{\sqrt{9 + 1 + 1}} = \frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{11}}.$$

5. Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(0\,;1\,;6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;3)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M_0'(1;-2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(1;1;-1)$.

a) Ta có $\overrightarrow{M_0M_0'} = (1\,;-3\,;-3)$, $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (-5\,;\,4\,;-1)$, do đó

$$\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = -14 \neq 0.$$

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Vì $\vec{u}.\vec{u'} = 0$ nên $d \perp d'$.

b) Gọi h là khoảng cách giữa d và d', ta có :

$$h = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right]\right|} = \frac{14}{\sqrt{25 + 16 + 1}} = \frac{\sqrt{42}}{3}.$$

c) Đường vuông góc chung Δ của d và d' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (-5\ ;\ 4\ ;-1)$. Ta viết phương trình của mp(Δ, d) và mp(Δ, d'), giao của hai mặt phẳng đó chính là Δ. Vectơ pháp tuyến của mp(Δ, d) là $\left[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{u}\right] = (14\ ;\ 14\ ;-14)$, cùng phương với vectơ $\vec{n} = (1\ ;\ 1\ ;\ -1)$ và điểm $M_0(0;1;6)$ nằm trên d nên cũng nằm trên mp(Δ, d).

Vậy phương trình của mp(Δ, d) là :

$$(x-0)+(y-1)-(z-6)=0 \text{ hay } x+y-z+5=0.$$

Vectơ pháp tuyến của mp(Δ, d') là $\left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u'}\right] = (-3\ ;-6\ ;-9)$, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{n'} = (1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ và điểm $M'_0(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ nằm trên d' nên cũng nằm trên mp(Δ, d'). Vậy phương trình của mp(Δ, d') là

$$x-1+2(y+2)+3(z-3)=0 \quad \text{hay} \quad x+2y+3z-6=0.$$

Suy ra phương trình tham số của đường vuông góc chung là $\begin{cases} x = -16+5t \\ y = 11-4t \\ z = t. \end{cases}$

d) Giả sử đường thẳng Δ song song với Oz, cắt d và d' lần lượt tại A và B. Khi đó ta có

$$A = (t\ ;\ 1+2t\ ;\ 6+3t),\ B = (1+t'\ ;\ -2+t'\ ;\ 3-t')$$

và $$\overrightarrow{AB} = (1+t'-t\ ;\ -3+t'-2t\ ;\ -3-t'-3t).$$

Vì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{k}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ nên $1+t'-t=-3+t'-2t=0$, suy ra $t=-4$ và $t'=-5$.

Vậy $A=(-4\ ;\ -7\ ;\ -6)$ và $\overrightarrow{AB} = (0\ ;\ 0\ ;\ 14)$.

Vậy phương trình của Δ là :

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \\ z = -6+t. \end{cases}$$

6. a) Nhận xét : hai đường thẳng d và d' không song song, không trùng nhau nên để chứng minh chúng đồng phẳng, ta chứng minh chúng cắt nhau. Điểm M nằm trên d có toạ độ $(7+3t\,;\,2+2t\,;\,1-2t)$, nó nằm trên d' khi và chỉ khi

$$\frac{7+3t-1}{2}=\frac{2+2t+2}{-3}=\frac{1-2t-5}{4},$$

hệ phương trình này có nghiệm $t=-2$. Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau, suy ra chúng đồng phẳng.

Mặt phẳng (P) chứa d và d' là mặt phẳng đi qua điểm $M_0(7\,;\,2\,;\,1)$ của d và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u}(3\,;\,2\,;-2)$ của d và vectơ chỉ phương $\vec{u'}(2\,;-3\,;\,4)$ của d'.

Vậy $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{u'}\right]=(2\,;-16\,;-13)$, do đó mp$(P)$ có phương trình

$$2(x-7)-16(y-2)-13(z-1)=0 \text{ hay } 2x-16y-13z+31=0.$$

b) Giao điểm của mặt phẳng (P) với các trục toạ độ là :

$$A\left(-\frac{31}{2}\,;\,0\,;\,0\right), B\left(0\,;\,\frac{31}{16}\,;\,0\right) \text{ và } C\left(0\,;\,0\,;\,\frac{31}{13}\right).$$

Thể tích tứ diện $OABC$ là

$$V=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}.\frac{31}{2}.\frac{31}{16}.\frac{31}{13}=\frac{31^3}{2496}.$$

c) Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ đi qua O nên có phương trình dạng

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz=0.$$

Lần lượt thay toạ độ các điểm A, B, C vào phương trình đó, ta tìm được các giá trị a, b, c và được phương trình của mặt cầu (S) là :

$$x^2+y^2+z^2+\frac{31}{2}x-\frac{31}{16}y-\frac{31}{13}z=0.$$

7. a) Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(0\,;\,3\,;\,6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1\,;\,0\,;\,1)$. Đường thẳng d' đi qua điểm $M_0'(2\,;\,1\,;\,2)$ và có vectơ chỉ

phương $\vec{u'}(1\,;-1\,;-1)$. Ta tính được $\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 2 \neq 0$. Vậy hai đường thẳng đó chéo nhau. Ngoài ra vì $\vec{u}.\vec{u'} = 0$ nên hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

b) Từ điều kiện của (P) suy ra (P) đi qua điểm M_0 và có vectơ pháp tuyến $\vec{u'}$, vậy (P) có phương trình

$$x - (y-3) - (z-6) = 0 \quad \text{hay} \quad x - y - z + 9 = 0.$$

Tương tự, (Q) đi qua điểm M_0' và có vectơ pháp tuyến $\vec{u}$ nên có phương trình

$$x - 2 + z - 2 = 0 \quad \text{hay} \quad x + z - 4 = 0.$$

c) Đường vuông góc chung của d và d' là giao tuyến của mp(P) và mp(Q) nên phương trình của đường vuông góc chung của d và d' là :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 5 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

8. a) Hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}(2\,;-1\,;1)$ và $\overrightarrow{n_Q}(1\,;1\,;2)$. Vì hai vectơ đó không cùng phương nên (P) và (Q) cắt nhau. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng đó thì :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|} = \frac{|2-1+2|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\varphi = 60^\circ$.

b) Đường thẳng d song song với cả (P) và (Q) phải có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ vuông góc với cả $\overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$. Vì $\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right] = (-3\,;-3\,;3)$ nên có thể lấy $\vec{u} = (1\,;1\,;-1)$. Ngoài ra, điểm $A(1\,;2\,;-3)$ không nằm trên cả (P) và (Q) nên đường thẳng d cần tìm có phương trình

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}.$$

c) Từ điều kiện của mp(R) suy ra (R) đi qua $B(-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$ và vuông góc với d, tức là có vectơ pháp tuyến $\vec{u}$ nên (R) có phương trình :

$$x + 1 + y - 3 - (z - 4) = 0 \text{ hay } x + y - z + 2 = 0.$$

9. a) Mặt cầu có tâm $I(1\,;2\,;3)$ và có bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

b) Gọi d là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu tới mp(P) thì :

$$d = \frac{|1 + 2 - 3 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{3}}.$$

Bởi vậy :

Nếu $\frac{|k|}{\sqrt{3}} < \sqrt{14}$ hay $|k| < \sqrt{42}$ thì (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn ;

Nếu $|k| = \sqrt{42}$ thì (P) tiếp xúc với mặt cầu ;

Nếu $|k| > \sqrt{42}$ thì (P) không cắt mặt cầu.

c) Trong phương trình mặt cầu, cho $y = z = 0$, ta được $x = 0$ hoặc $x = 2$. Vậy mặt cầu cắt trục Ox tại điểm O và điểm $A(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

Tương tự, mặt cầu cắt trục Oy tại điểm O và điểm $B(0\ ;\ 4\ ;\ 0)$, cắt trục Oz tại điểm O và điểm $C(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$. Suy ra phương trình mp(ABC) là :

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1.$$

d) Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu tại điểm $B(0\ ;\ 4\ ;\ 0)$ phải đi qua B và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IB} = (-1\ ;\ 2\ ;-3)$. Vậy ($\alpha$) có phương trình :

$$-(x - 0) + 2(y - 4) - 3(z - 0) = 0 \text{ hay } x - 2y + 3z + 8 = 0.$$

e) Mặt phẳng (Q') song song với (Q) có phương trình :

$$4x + 3y - 12z + D = 0 \ (D \neq -1).$$

Khoảng cách h từ tâm I của mặt cầu tới mp(Q') là

$$h = \frac{|4.1 + 3.2 - 12.3 + D|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = \frac{|D - 26|}{13}.$$

Mặt phẳng (Q') tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi $\frac{|D - 26|}{13} = \sqrt{14}$

hay $D = 26 \pm 13\sqrt{14}$. Vậy ta có hai mặt phẳng cần tìm là

$$4x + 3y - 12z + 26 \pm 13\sqrt{14} = 0.$$

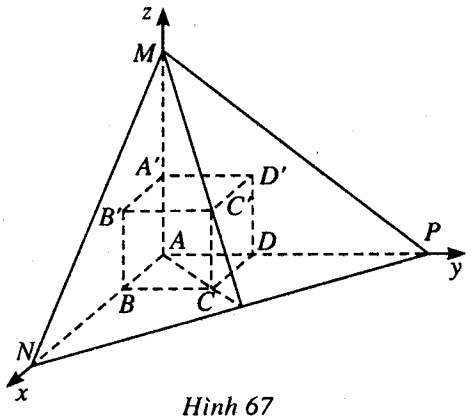
10. (h.67) Ta chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho O trùng A, các tia Ox, Oy và Oz lần lượt chứa các điểm B, D và A'. Khi đó ta có

$A = (0 ; 0 ; 0)$, $B = (1 ; 0 ; 0)$,

$D = (0 ; 1 ; 0)$, $A' = (0 ; 0 ; 1)$,

$C' = (1 ; 1 ; 1)$, $M = (0 ; 0 ; m)$,

$N = (n ; 0 ; 0)$, $P = (0 ; p ; 0)$.



Hình 67

a) Mặt phẳng (MNP) có phương trình theo đoạn chắn $\frac{x}{n} + \frac{y}{p} + \frac{z}{m} = 1$ nên mặt phẳng đó đi qua đỉnh C' khi và chỉ khi :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} = 1. \qquad (*)$$

b) Thể tích tứ diện $AMNP$ là $V = \frac{1}{6}AM.AN.AP = \frac{1}{6}mnp$ (trong đó m, n, p là các số dương thoả mãn điều kiện (*)). Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương, ta có :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{m} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} \Leftrightarrow 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} \Leftrightarrow \frac{1}{mnp} \leq \frac{1}{3^3} \Leftrightarrow mnp \geq 27.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} = \frac{1}{p} = \frac{1}{3}$, tức là $m = n = p = 3$. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của thể tích V là $\frac{27}{6}$, khi đó $A.MNP$ là hình chóp đều.

Trả lời các câu hỏi trắc nghiệm

1. (C), **2.** (D), **3.** (C), **4.** (A), **5.** (D), **6.** (A), **7.** (B), **8.** (A), **9.** (A), **10.** (C), **11.** (C), **12.** (A), **13.** (C), **14.** (A), **15.** (A), **16.** (C), **17.** (D), **18.** (A), **19.** (A), **20.** (C), **21.** (B), **22.** (B), **23.** (C), **24.** (D), **25.** (B), **26.** (D), **27.** (C), **28.** (D), **29.** (D), **30.** (A), **31.** (A), **32.** (D), **33.** (B), **34.** (A), **35.** (D), **36.** (A), **37.** (D), **38.** (A), **39.** (B), **40.** (C), **41.** (C), **42.** (B).

MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA

(Để giáo viên tham khảo)

Các đề kiểm tra 15 phút

Đề 1. (sau §2 chương III) Cho ba điểm $A(-2\,;\,5\,;\,-3)$, $B(1\,;\,-3\,;\,2)$, $C(2\,;\,0\,;\,-1)$.

a) Viết phương trình mp(ABC).

b) Tính thể tích tứ diện $OABC$.

Đáp án và thang điểm

a) (5 điểm). $\overrightarrow{AB} = (3;-8;5)$, $\overrightarrow{AC} = (4;-5;2)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (9;14;17)$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua $A(-2\,;\,5\,;\,-3)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ nên có phương trình :

$$9(x+2) + 14(y-5) + 17(z+3) = 0 \quad \text{hay} \quad 9x + 14y + 17z - 1 = 0.$$

b) (5 điểm). Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (9;14;17)$ và $\overrightarrow{OA} = (-2;5;-3)$ nên thể tích V của tứ diện $OABC$ là :

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{OA}\right| = \frac{1}{6}\left|-18 + 70 - 51\right| = \frac{1}{6}.$$

Đề 2. (sau §3 chương III).

Cho điểm $B(-2\,;\,1\,;-3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình

$$2x - 3y + 5z - 4 = 0.$$

Viết phương trình chính tắc và tham số của đường thẳng d đi qua B và vuông góc với (P).

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng OB trên mp(P).

Đáp án và thang điểm

a) (5 điểm). Đường thẳng d đi qua B có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{n_P}(2;-3;5)$ nên có phương trình $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+3}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -3 + 5t. \end{cases}$

b) (5 điểm). Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua OB và vuông góc với (P) thì nó có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{n_P}\right] = (-4\ ;\ 4\ ;\ 4)$, vậy có thể lấy $\overrightarrow{n_Q} = (-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$; ngoài ra (Q) đi qua điểm $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ nên (Q) có phương trình : $-x + y + z = 0$. Hình chiếu của đường thẳng OB trên mp(P) chính là giao tuyến của (P) và (Q) nên suy ra phương trình tham số của hình chiếu là :

$$\begin{cases} x = -4 + 8t \\ y = -4 + 7t \\ z = t. \end{cases}$$

Các đề kiểm tra 45 phút

Đề 1. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho các điểm : $A(3\ ;\ -2\ ;\ -2)$, $B(3\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$ và $D(-1\ ;\ 1\ ;\ 2)$.

1) Viết phương trình mp(BCD). Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình tứ diện. Tính thể tích của nó.

2) Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mp(BCD).

3) Viết phương trình đường thẳng d đi qua A, song song với mp(BCD) và vuông góc với Oz.

Đáp án và thang điểm

1) (4 điểm). Ta có $\overrightarrow{BC} = (-3;0;1)$, $\overrightarrow{BD} = (-4;-1;2)$, suy ra $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right] = (1;2;3)$.

Mặt phẳng (BCD) đi qua $B(3\ ;\ 2\ ;\ 0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]$ nên có phương trình

$$(x - 3) + 2(y - 2) + 3z = 0 \text{ hay } \quad x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Vì toạ độ điểm A không phải là nghiệm của phương trình đó nên A không thuộc mp(BCD), do đó $ABCD$ là hình tứ diện. Ta có : $\overrightarrow{BA} = (0;-4;-2)$ nên

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BA}\right| = \frac{1}{6}|-8-6| = \frac{7}{3}.$$

2) (4 điểm). Khoảng cách từ A đến mp(BCD) là

$$d = \frac{|3 - 2.2 - 3.2 - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{14}.$$

Mặt cầu cần tìm có tâm A, bán kính $R = d$ nên có phương trình :

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 14 \text{ hay}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0.$$

3) (2 điểm). Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d thì $\vec{u}$ phải vuông góc với vectơ $\vec{n}(1;2;3)$ và $\vec{k}(0;0;1)$ nên $\vec{u} = (2;-1;0)$. Ngoài ra, d đi qua $A(3;-2;-2)$ nên d có phương trình :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -2. \end{cases}$$

Đề 2. Trong không gian toạ độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng d, d' và mp(α) :

$$d: \frac{x-1}{3} = y - 2 = \frac{z+1}{2}, \quad d': \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases}, \quad (\alpha) : x + y - z - 2 = 0.$$

1) Chứng minh d và d' chéo nhau. Tính khoảng cách giữa d và d'.

2) Tìm toạ độ giao điểm I của d và (α). Viết phương trình mặt cầu tâm I đi qua O.

3) Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (α), cắt cả d và d'.

Đáp án và thang điểm

1) (4 điểm). Đường thẳng d đi qua $M(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(3;1;2)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2, 0, 4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u'}(-3;2;-2)$.

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (1;-2;5)$, $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right] = (-6;0;9)$, $\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'} = 39 \neq 0$.

Vậy d và d' chéo nhau. Gọi h là khoảng cách giữa d và d' thì :

$$h = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{u'}\right]\right|} = \frac{39}{\sqrt{36 + 81}} = \sqrt{13}.$$

2) (3 điểm). Toạ độ giao điểm I của d và (α) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = y-2 = \dfrac{z+1}{2} \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y-5 \\ z = 2y-5 \\ x+y-z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y-5 \\ z = 2y-5 \\ (3y-5)+y-(2y-5)-2=0. \end{cases}$$

Suy ra $I = (-2\ ;\ 1\ ;\ -3)$.

Bán kính mặt cầu cần tìm là $R = OI = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$. Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình :

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 14.$$

3) (3 điểm). Gọi $J = d' \cap (\alpha)$ thì toạ độ của J là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x = 2-3t \\ y = 2t \\ z = 4-2t \\ x+y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow t = 4 \Rightarrow J = (-10\ ;\ 8\ ;\ -4).$$

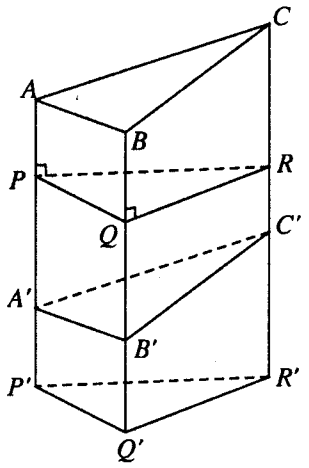
Đường thẳng cần tìm phải đi qua I và J nên có phương trình :

$$\frac{x+2}{-10+2} = \frac{y-1}{8-1} = \frac{z+3}{-4+3} \Leftrightarrow \frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z+3}{1}.$$

ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. Bài tập tự luận

1. a) (h.68) Mặt phẳng (PQR) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$, trong đó $\mathscr{H}_1$ chứa tam giác ABC còn $\mathscr{H}_2$ chứa tam giác $A'B'C'$. Mặt phẳng $(A'B'C')$ chia khối lăng trụ $PQR.P'Q'R'$ thành hai khối đa diện $\mathscr{H}_2$ và $\mathscr{H}_3$, trong đó $\mathscr{H}_3$ chứa tam giác $P'Q'R'$. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của các khối đa diện $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_3$, ta có :



Hình 68

$V_{ABC.A'B'C'} = V_1 + V_2$, $V_{PQR.P'Q'R'} = V_2 + V_3$.

Vì phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ và biến tam giác PQR thành tam giác $P'Q'R'$ nên khối đa diện $\mathscr{H}_1$ biến thành khối đa diện $\mathscr{H}_3$, vì vậy ta có $V_1 = V_3$. Từ đó suy ra

$$V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R'}.$$

b) Vì lăng trụ $PQR.P'Q'R'$ là lăng trụ đứng có chiều cao $PP' = AA'$ nên

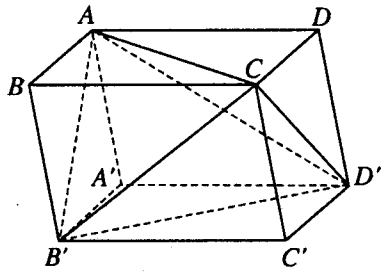
$$V_{ABC.A'B'C'} = V_{PQR.P'Q'R'} = S_{PQR}.AA'.$$

2. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ và A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC thì phép vị tự tâm G với tỉ số $k = -\frac{1}{3}$ biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$.

Bởi vậy $V_{A'B'C'D'} = |k|^3 V_{ABCD} = \frac{1}{27}V$.

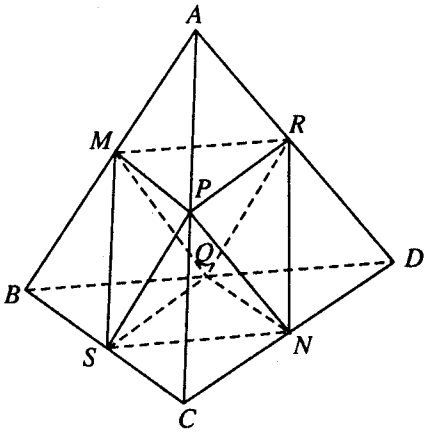
3. (h.69) Các tứ diện $BACB', C'B'CD', DD'AC, A'AB'D'$ đều có thể tích bằng $\frac{V}{6}$. Bởi vậy :

$$V_{ACB'D'} = V - 4.\frac{V}{6} = \frac{V}{3}.$$



Hình 69

4. (h.70) Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AC, BD, AD, BC của tứ diện đều $ABCD$ thì dễ thấy các tam giác MPR, MRQ, MQS, MSP, NPR, NRQ, NQS, NSP là những tam giác đều, vậy ta có hình tám mặt đều $MNPQRS$. Vì các tứ diện $AMPR$, $BMQS$, $CPSN$, $DQNR$ đều là những tứ diện đồng dạng với tứ diện $ABCD$ với tỉ số $k = \frac{1}{2}$ nên có thể tích bằng $\frac{V}{8}$.

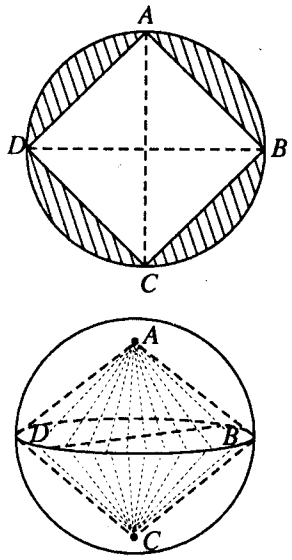


Hình 70

Suy ra $V_{MPRQSN} = V - 4.\frac{V}{8} = \frac{V}{2}$.

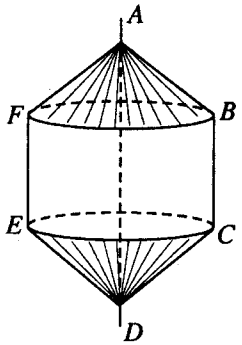
5. (h.71) Khi quay quanh đường chéo AC thì hình tròn $(O\ ;\ R)$ sinh ra khối cầu (S), đoạn thẳng BD sinh ra hình tròn $(\mathscr{C})$ và hình vuông $ABCD$ sinh ra hình tròn xoay $\mathscr{K}$ gồm hai hình nón có chung đáy là $(\mathscr{C})$ với đỉnh là A và C. Bởi vậy, $\mathscr{H}$ sinh ra khối tròn xoay gồm những điểm thuộc hình cầu (S) nhưng không thuộc $\mathscr{K}$ và thể tích V của khối đó là :

$$V = V_{(S)} - V_{\mathscr{K}} = \frac{4}{3}\pi R^3 - 2.\frac{1}{3}\pi R^2.R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$



Hình 71

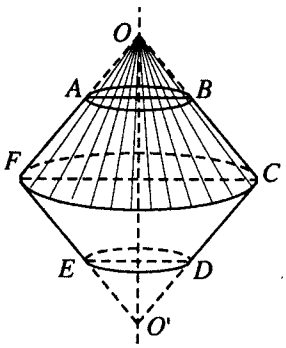
6. a) (h.72) Khi quay lục giác đều $ABCDEF$ quanh đường thẳng AD, ta được khối tròn xoay hợp bởi ba khối : khối nón $\mathscr{N}_1$ sinh bởi tam giác ABF, khối trụ $\mathscr{T}$ sinh bởi hình chữ nhật $BCEF$ và khối nón $\mathscr{N}_2$ sinh bởi tam giác DCE. Hai khối nón và khối trụ đều có bán kính đáy là $R = \frac{BF}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khối trụ có chiều cao a và các khối nón có chiều cao $\frac{a}{2}$. Vậy khối tròn xoay sinh bởi lục giác đã cho có thể tích là :



Hình 72

$$V = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 .a + 2.\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 .\frac{a}{2} = \pi a^3.$$

b) (h.73) Gọi Δ là đường thẳng nối trung điểm của AB và ED. Khi đó BC và AF cắt nhau tại điểm O trên Δ, CD và FE cắt nhau tại điểm O' trên Δ. Gọi V, V_1, V_2 là thể tích của các khối tròn xoay lần lượt sinh ra bởi lục giác đều $ABCDEF$, tam giác OCF và tam giác OAB khi quay quanh Δ, ta có :



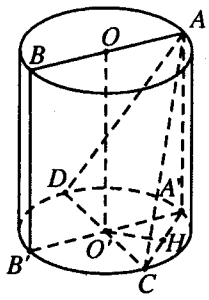
Hình 73

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 .a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3} ;$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Do đó $V = 2(V_1 - V_2) = \dfrac{7\sqrt{3}\pi a^3}{12}$.

7. (h.74) a) Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng chứa đường tròn đáy có đường kính CD, dễ thấy A, B thuộc đường tròn này. Khi đó $A'B' \perp CD$ nên $A'CB'D$ là hình vuông có đường chéo $CD = 2R$, do đó $A'C = R\sqrt{2}$, ngoài ra $AA' = R\sqrt{2}$ nên ta suy ra $AC = 2R$.



Hình 74

Tương tự ta có $AD = BC = BD = 2R$.

Vậy $ABCD$ là tứ diện đều.

b) Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó, khoảng cách d giữa hai đường thẳng OO' và AC bằng khoảng cách giữa OO' và mp$(AA'C)$ và bằng $O'H$ (H là trung điểm của $A'C$). Vậy $d = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự, khoảng cách giữa mỗi đường thẳng AD, BC, BD và OO' đều bằng $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. Từ đó suy ra các cạnh AC, AD, BC, BD đều tiếp xúc với mặt trụ $\mathcal{C}$ có trục là OO' và có bán kính $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

8. a) Ta có :

$$\overrightarrow{AB} = (3;-3;-8), \overrightarrow{AC} = (4;0;-4), \overrightarrow{AD} = (0;-3;1).$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (12;-20;12) \text{ và } \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 72 \neq 0.$$

Suy ra bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

b) Giả sử mặt cầu (S) có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

Vì mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D nên ta có :

$$\begin{cases} 1 + 25 + 9 + 2a + 10b + 6c + d = 0 \\ 16 + 4 + 25 + 8a + 4b - 10c + d = 0 \\ 25 + 25 + 1 + 10a + 10b - 2c + d = 0 \\ 1 + 4 + 16 + 2a + 4b + 8c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + 3b + 8c = 5 \\ -a \quad\quad + c = 2 \\ \quad\quad 3b - c = -7. \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được $a = -1$, $b = -2$, $c = 1$, $d = -19$. Vậy phương trình mặt cầu (S) là : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 19 = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I = (1;2;-1)$ và bán kính $R = \sqrt{1 + 4 + 1 + 19} = 5$.

c) mp(ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ cùng phương với vectơ $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (12;-20;12)$ nên có thể lấy $\vec{n} = (3;-5;3)$. Ngoài ra, mặt phẳng đó đi qua điểm $A(1\ ;\ 5\ ;\ 3)$ nên có phương trình :

$$3(x-1) - 5(y-5) + 3(z-3) = 0 \text{ hay } 3x - 5y + 3z + 13 = 0.$$

Khoảng cách từ D đến mặt phẳng đó là :

$$h = \frac{|3.1 - 5.2 + 3.4 + 13|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 3^2}} = \frac{18}{\sqrt{43}}.$$

d) Mặt phẳng (α) vuông góc với CD có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{CD} = (-4;-3;5)$ nên có phương trình : $-4x - 3y + 5z + d = 0$.

Mặt phẳng đó tiếp xúc với mặt cầu (S) khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm $I(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ của mặt cầu (S) tới mặt phẳng (α) bằng 5, tức là :

$$\frac{|-4.1 - 3.2 - 5.1 + d|}{\sqrt{16 + 9 + 25}} = 5 \Leftrightarrow \frac{|-15 + d|}{\sqrt{50}} = 5 \Leftrightarrow d = 15 \pm 25\sqrt{2}.$$

Vậy ta có hai mặt phẳng cần tìm với phương trình :

$$-4x - 3y + 5z + 15 \pm 25\sqrt{2} = 0.$$

e) Tâm mặt cầu (S) là $I(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$. Khoảng cách từ I tới (Oxy) là $d_1 = |-1| = 1$ nên (S) cắt mp(Oxy) theo đường tròn có bán kính

$$r_1 = \sqrt{R^2 - d_1^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}.$$

Khoảng cách từ I tới mp(Oyz) là $d_2 = 1$ nên (S) cắt mp(Oyz) theo đường tròn có bán kính $r_2 = \sqrt{R^2 - d_2^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}$.

Khoảng cách từ I tới mp(Oxz) là $d_3 = 2$ nên (S) cắt mp(Oxz) theo đường tròn có bán kính $r_3 = \sqrt{R^2 - d_3^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$.

9. a) Đường thẳng Δ có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3t. \end{cases}$

Vì mỗi điểm $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ có hình chiếu trên mp(Oxy) là $M'(x\ ;\ y\ ;\ 0)$ nên hình chiếu d_1 của Δ trên mặt phẳng (Oxy) có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 0. \end{cases}$$

Tương tự, hình chiếu d_2 của Δ trên mặt phẳng (Oyz) là

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 3t, \end{cases}$$

hình chiếu d_3 của Δ trên mặt phẳng (Oxz) là

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3t. \end{cases}$$

b) Mặt phẳng (α) đã cho có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1 ; 5 ; 1)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2, -1, 3)$.

Vì $\vec{n}.\vec{u} = 0$ nên Δ song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α).

Lại có điểm $M(1 ; -1 ; 0)$ của Δ nằm trên (α) nên Δ nằm trên (α).

c) Khoảng cách h_1 giữa Oz và Δ bằng khoảng cách từ O tới đường thẳng d_1. Xét trong mặt phẳng toạ độ Oxy thì $O = (0 ; 0)$ còn đường thẳng d_1 có phương trình : $x + 2y + 1 = 0$.

Vậy ta có

$$h_1 = \frac{|1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Tương tự :

Khoảng cách h_2 giữa Ox và Δ bằng khoảng cách từ O tới đường thẳng d_2 nên :

$$h_2 = \frac{|3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10};$$

Khoảng cách h_3 giữa Oy và Δ bằng khoảng cách từ O tới đường thẳng d_3 nên :

$$h_3 = \frac{|-3|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

d) Lấy điểm $P = (1 + 2t; -1 - t ; 3t)$ nằm trên Δ và điểm $Q = (t' ; t' ; t')$ nằm trên Δ'. Ta có

$$\overrightarrow{QP} = (1 + 2t - t' ; -1 - t - t' ; 3t - t').$$

PQ là đường vuông góc chung của Δ và Δ' khi và chỉ khi $\overrightarrow{QP}$ vuông góc với cả hai vectơ chỉ phương của Δ và Δ' là $\overrightarrow{u_\Delta}(2;-1;3)$ và $\overrightarrow{u_{\Delta'}}(1 ; 1 ; 1)$.

Như vậy ta có $\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0$ và $\overrightarrow{QP}.\overrightarrow{u_{\Delta'}} = 0$ hay là :

$$\begin{cases} 2(1 + 2t - t') - (-1 - t - t') + 3(3t - t') = 0 \\ 1 + 2t - t' - 1 - t - t' + 3t - t' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14t - 4t' + 3 = 0 \\ 4t - 3t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{9}{26} \\ t' = -\dfrac{6}{13}. \end{cases}$$

Do đó $Q = \left(-\frac{6}{13}; -\frac{6}{13}; -\frac{6}{13}\right)$ và $\overrightarrow{QP} = \left(\frac{20}{26}; -\frac{5}{26}; -\frac{15}{26}\right)$.

Đường vuông góc chung của Δ và Δ' đi qua Q, nhận $\vec{v} = (4; -1; -3)$ là m vectơ chỉ phương nên có phương trình :

$$\begin{cases} x = -\frac{6}{13} + 4t \\ y = -\frac{6}{13} - t \\ z = -\frac{6}{13} - 3t. \end{cases}$$

e) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hình chiếu d_1 của đường thẳng Δ có phương trình $x + 2y + 1 = 0$

và hình chiếu d_1' của Δ' có phương trình $x = y$.

Giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_1' là $I = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 0\right)$.

Khi đó, đường thẳng đi qua I, song song với Oz sẽ cắt cả hai đường thẳng Δ và Δ'. Phương trình đường thẳng đó là :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t. \end{cases}$$

10. a) Giả sử $M = (x ; y ; z)$, khi đó :

$$MA^2 - MB^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow (1 - x)^2 + (-1 - y)^2 + (2 - z)^2 - (2 - x)^2 - y^2 - (1 - z)^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow 2x + 2y - 2z - 1 = 0. \qquad (*)$$

Vậy quỹ tích các điểm M là mặt phẳng có phương trình (*).

b) Giả sử $N = (x ; y ; z)$, khi đó :

$$NA^2 + NB^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow (1 - x)^2 + (-1 - y)^2 + (2 - z)^2 + (2 - x)^2 + y^2 + (1 - z)^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - 3z + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Vậy quỹ tích các điểm N là mặt cầu có tâm $I\left(\frac{3}{2}\ ;-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right)$, bán kính $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Mặt phẳng (OAB) đi qua O, có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(-1;3;2)$ nên có phương trình :

$$-x+3y+2z=0.$$

Điểm $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ cách đều mp(OAB) và mp(Oxy) khi và chỉ khi :

$$\frac{|-x+3y+2z|}{\sqrt{1+9+4}}=|z| \Leftrightarrow -x+3y+2z=\pm\sqrt{14}z$$

$$\Leftrightarrow -x+3y+(2\mp\sqrt{14})z=0. \qquad (*)$$

Vậy quỹ tích cần tìm là hai mặt phẳng có phương trình (*).

11. a) Dễ thấy đường thẳng Δ đi qua điểm cố định $A(1;1;5)$. Ta có $\vec{u}(a;b;c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ. Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và trục Oz. Khi đó

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{k}\right)\right|=\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|=\left|\frac{c}{c\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos45^{\circ}.$$

Vậy $\varphi=45^{\circ}$.

b) Toạ độ giao điểm $M(x;\ y;\ z)$ của đường thẳng Δ và mp(Oxy) thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases}x=1+at\\y=1+bt\\z=5+ct\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=at\\y-1=bt\\t=-\dfrac{5}{c}\\z=0.\end{cases}$$

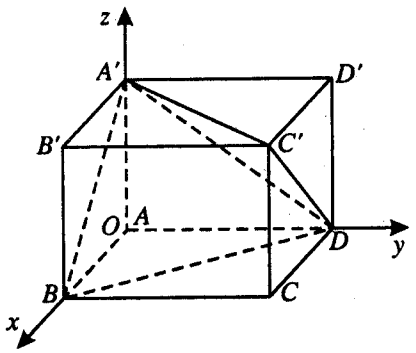
(Để ý rằng $c\neq 0$ vì nếu $c=0$ thì $a=b=0$, vô lí).

Từ đó suy ra toạ độ $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ của M thoả mãn điều kiện

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(a^2+b^2)\left(-\frac{5}{c}\right)^2=25 \text{ và } z=0.$$

Vậy quỹ tích điểm M khi Δ thay đổi là đường tròn tâm $I(1;1;0)$, bán kính bằng 5 và nằm trong mặt phẳng (Oxy).

12. (h.75) Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ sao cho O trùng A, tia Ox là tia AB, tia Oy là tia AD, tia Oz là tia AA'. Khi đó $A = (0\,;\,0\,;\,0)$, $B = (a\,;\,0\,;\,0)$, $D = (0\,;\,b\,;\,0)$, $A' = (0\,;\,0\,;\,c)$, $C = (a\,;\,b\,;\,0)$, $D' = (0\,;\,b\,;\,c)$, $B' = (a\,;\,0\,;\,c)$, $C' = (a\,;\,b\,;\,c)$.



Hình 75

a) Phương trình mp$(A'BD)$ là :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Bởi vậy khoảng cách từ A tới mặt phẳng $(A'BD)$ là

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

b) $\overrightarrow{A'C'} = (a\,;b\,;0)$, $\overrightarrow{C'D} = (-a\,;0\,;-c)$, $\left[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'D}\right] = (-bc\,;ac\,;ab)$.

Vậy khoảng cách từ A' tới đường thẳng $C'D$ là :

$$h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'D}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{C'D}\right|} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

c) $\overrightarrow{BC'} = (0, b, c)$, $\overrightarrow{CD'} = (-a; 0; c)$, $\overrightarrow{BC} = (0, b, 0)$.

Vậy khoảng cách giữa BC' và CD' là

$$h' = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'}\right].\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'}\right]\right|} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

B. Câu hỏi trắc nghiệm

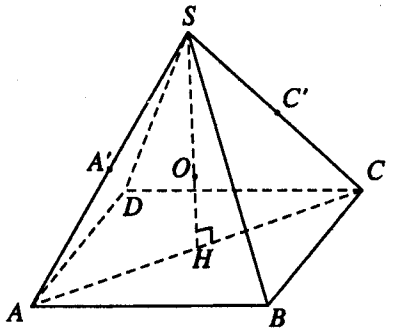
1. (C), **2.** (C), **3.** (D), **4.** (B), **5.** (A), **6.** (B), **7.** (A), **8.** (C), **9.** (A), **10.** (B), **11.** (A), **12.** (C), **13.** (B), **14.** (D), **15.** (A), **16.** (B), **17.** (D), **18.** (D), **19.** (A), **20.** (A), **21.** (D), **22.** (D), **23.** (B).

C. Một số đề kiểm tra

Đề I.

Câu 1. (h.76) a) Tam giác SAC là tam giác đều có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nên có đường cao $SH = a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Hiển nhiên SH cũng là đường cao của hình chóp. Suy ra thể tích của hình chóp là

$$V = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$



Hình 76

b) Gọi O là trọng tâm của tam giác đều SAC thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Bán kính mặt cầu là

$$R = OS = \frac{2}{3}SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

c) Hai hình chóp đó đối xứng với nhau qua mp(SBD) nên bằng nhau.

Câu 2. a) Ta có $AB = \sqrt{(1-4)^2 + (2+1)^2 + (2-2)^2} = 3\sqrt{2}$,

$$BC = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-2)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2},$$

$$CA = \sqrt{(4-1)^2 + (-1+1)^2 + (2-5)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Suy ra $AB = BC = CA$ và do đó, ABC là tam giác đều.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;3;0)$, $\overrightarrow{AC} = (-3;0;3)$, $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (9;9;9)$. Bởi vậy, mp$(ABC)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;1)$ và đi qua điểm $A(4;-1;2)$ nên có phương trình : $x - 4 + y + 1 + z - 2 = 0$ hay $x + y + z - 5 = 0$.

Mặt phẳng (ABC) cắt các trục toạ độ tại các điểm $M(5\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $N(0\ ;\ 5\ ;\ 0)$ và $P(0\ ;\ 0\ ;\ 5)$. Vậy mặt phẳng đó và các mặt phẳng toạ độ tạo thành tứ diện $OMNP$ có thể tích là

$$V = \frac{1}{6}OM.ON.OP = \frac{5.5.5}{6} = \frac{125}{6}.$$

c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC là trọng tâm G của tam giác đó, vậy $G = \left(\frac{4+1+1}{3}; \frac{-1+2-1}{3}; \frac{2+2+5}{3}\right) = (2;0;3)$. Trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường thẳng đi qua G, có vectơ chỉ phương $\vec{n}(1;1;1)$ nên có phương trình :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

d) $ABCD$ là tứ diện đều khi và chỉ khi D nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $DA = AB = 3\sqrt{2}$. Do đó $D = (2 + t; t; 3 + t)$ và $DA^2 = 18$, suy ra

$$(2 + t - 4)^2 + (t + 1)^2 + (3 + t - 2)^2 = 18 \Leftrightarrow t = \pm 2.$$

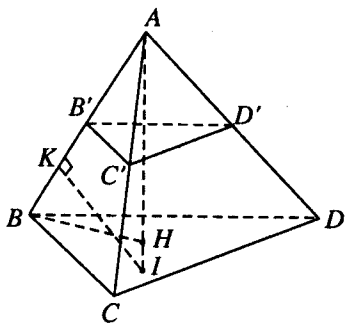
Suy ra có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán :

$$D_1 = (4;2;5) \quad \text{và} \quad D_2 = (0;-2;1).$$

Đề II.

Câu 1. (h.77)

a) Gọi AH là đường cao của hình tứ diện đều $ABCD$ thì AH là trục của cả hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và tam giác $B'C'D'$. Bởi vậy, nếu gọi I là giao điểm của đường thẳng AH và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BB' thì $IB = IC = ID = IB' = IC' = ID'$, hay sáu điểm B, C, D, B', C', D' nằm trên mặt cầu tâm I, bán kính IB.



Hình 77

Gọi K là trung điểm của BB' thì từ hai tam giác vuông đồng dạng AIK và ABH, ta có :

$$\frac{IK}{BH} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow IK = \frac{BH.AK}{AH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{3a}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}a}{8}.$$

Vậy $$IB^2 = IK^2 + KB^2 = \frac{9a^2}{32} + \frac{a^2}{16} = \frac{11a^2}{32}.$$

Bán kính mặt cầu là $R = IB = \dfrac{a\sqrt{11}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{22}}{8}$.

b) Hai hình chóp $D.BCC'B'$ và $D.ABC$ có chung chiều cao, còn diện tích hình thang $BCC'B'$ bằng 3/4 diện tích tam giác ABC, bởi vậy thể tích V của hình chóp $D.BCC'B'$ là :

$$V = \frac{3}{4}V_{ABCD} = \frac{3}{4}.\frac{1}{3}S_{BCD}.AH = \frac{1}{4}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{16}.$$

Câu 2.

a) Giả sử mặt cầu (S) có phương trình :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

Vì mặt cầu đi qua A, A', B, C nên toạ độ của các điểm đó phải thoả mãn phương trình mặt cầu, tức là :

$$\begin{cases} 4 + 4a + d = 0 \\ 36 + 12a + d = 0 \\ 9 + 6b + d = 0 \\ 16 + 8c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -4,\ b = -\frac{7}{2},\ c = -\frac{7}{2},\ d = 12.$$

Vậy phương trình mặt cầu là :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 7y - 7z + 12 = 0.$$

Toạ độ các điểm B' và C' cũng thoả mãn phương trình trên nên các điểm đó cũng nằm trên mặt cầu.

b) Vì G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên $G = \left(2; \frac{4}{3}; 1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2\,;\,3\,;\,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2\,;\,0\,;\,4)$, vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OG} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OG} = 0$, suy ra $OG \perp AC, OG \perp AB$, do đó $OG \perp \text{mp}(ABC)$. Vì tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nên nếu H là trực tâm của tam giác ABC thì $OH \perp \text{mp}(ABC)$. Vậy ba điểm O, H, G cùng nằm trên một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{\frac{4}{3}} = z \text{ hay } \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}.$$

c) Giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (ABC') và $(A'B'C)$ gồm những điểm $M(x; y; z)$ thoả mãn hệ :

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1\\ \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y+2z=6\\ 2x+3y+3z=12.\end{cases}$$

Suy ra đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0=\left(\frac{-6}{5};\frac{24}{5};0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(0;-1;1)$.

Vậy khoảng cách từ O tới Δ là :

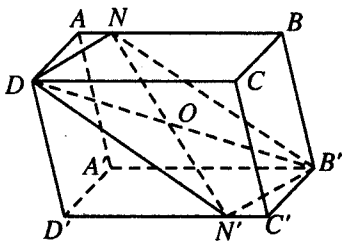
$$\frac{\left|\left[\overrightarrow{OM_0},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}\frac{24}{5}&0\\-1&1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0&-\frac{6}{5}\\1&0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-\frac{6}{5}&\frac{24}{5}\\0&-1\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{18}{5}.$$

Đề III.

Câu 1. (h.78)

a) Gọi N' là điểm đối xứng với N qua tâm O của hình hộp. Khi đó, mp(α) cắt hình hộp theo thiết diện là hình bình hành $DNB'N'$.

b) Tâm O của hình hộp cũng là tâm của hình bình hành $DNB'N'$. Phép đối xứng qua tâm O biến các đỉnh của hình hộp thành các đỉnh của hình hộp, biến các đỉnh của hình bình hành $DNB'N'$ thành các đỉnh của hình bình hành đó. Bởi vậy, phép đối xứng qua tâm O biến các đỉnh của hình đa diện $\mathscr{H}_1$ thành các đỉnh của hình đa diện $\mathscr{H}_2$. Do đó $\mathscr{H}_1$ và $\mathscr{H}_2$ bằng nhau.



Hình 78

c) Gọi V là thể tích khối hộp đã cho thì thể tích V_1 của khối đa diện $\mathscr{H}_1$ là $\frac{V}{2}$, còn thể tích V_2 của khối tứ diện $AA'BD$ là $\frac{V}{6}$. Suy ra $\frac{V_1}{V_2}=3$.

Câu 2.

a) Khoảng cách từ điểm $A(1;-3;-1)$ tới trục Ox là $d=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$, khoảng cách từ điểm $B(-2;1;3)$ tới trục Ox là $d'=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$. Vậy hai khoảng cách đó bằng nhau.

b) Vì điểm C nằm trên Oz nên $C = (0 ; 0 ; c)$, khi đó $\overrightarrow{CA} = (1 ; -3 ; -1 - c)$, $\overrightarrow{CB} = (-2 ; 1 ; 3 - c)$. Tam giác ABC vuông tại C khi và chỉ khi $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = 0$ hay $-2 - 3 + (-1 - c)(3 - c) = 0$.

Vậy $c^2 - 2c - 8 = 0$, do đó $c = 4$ hoặc $c = -2$.

Ta có hai điểm thoả mãn yêu cầu là $C_1 = (0 ; 0 ; 4)$ và $C_2 = (0 ; 0 ; -2)$.

c) Hình chiếu của điểm $A(1 ; -3 ; -1)$ trên mp(Oyz) là $A' = (0 ; -3 ; -1)$, hình chiếu của điểm B trên mp(Oyz) là $B' = (0 ; 1 ; 3)$. Vì $\overrightarrow{A'B'} = (0; 4; 4)$ nên đường thẳng $A'B'$ có phương trình

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

d) Mặt cầu cần tìm có tâm I nằm trên mặt phẳng (Oxy) nên $I = (a ; b ; 0)$. Mặt cầu đi qua O, A, B nên $OI = AI = BI$. Như vậy :

$$\begin{cases} OI^2 = AI^2 \\ OI^2 = BI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = (1 - a)^2 + (-3 - b)^2 + 1 \\ a^2 + b^2 = (-2 - a)^2 + (1 - b)^2 + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 6b + 11 = 0 \\ 4a - 2b + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{53}{10} \\ b = -\dfrac{18}{5}. \end{cases}$$

Suy ra mặt cầu có tâm : $I\left(-\dfrac{53}{10} ; -\dfrac{18}{5}; 0\right)$ và có bán kính

$$r = OI = \sqrt{\left(\frac{-53}{10}\right)^2 + \left(-\frac{18}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4105}{100}} = \sqrt{\frac{821}{20}}.$$

Vậy mặt cầu có phương trình $\left(x + \dfrac{53}{10}\right)^2 + \left(y + \dfrac{18}{5}\right)^2 + z^2 = \dfrac{821}{20}$.

MỤC LỤC

	Trang
Mở đầu	3
Chương I. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG	9
§1. Khái niệm về khối đa diện	10
§2. Phép đối xứng qua mặt phẳng và sự bằng nhau của các khối đa diện	15
§3. Phép vị tự và sự đồng dạng của các khối đa diện. Các khối đa diện đều	19
§4. Thể tích của khối đa diện	21
Ôn tập chương I	31
Chương II. MẶT CẦU, MẶT TRỤ, MẶT NÓN	40
§1. Mặt cầu, khối cầu	42
§2. Khái niệm về mặt tròn xoay	50
§3. Mặt trụ, hình trụ và khối trụ	51
§4. Mặt nón, hình nón và khối nón	54
Ôn tập chương II	58
Chương III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	66
§1. Hệ toạ độ trong không gian	68
§2. Phương trình mặt phẳng	80
§3. Phương trình đường thẳng	89
Ôn tập chương III	106
ÔN TẬP CUỐI NĂM	121
	135

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

Giá: 6.200đ